

Е. Я. ГИК

# МАТЕМАТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

729.1 75  
Г 46 с1



ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА

30/10-12

Формы № 10

КОМЕТ



АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
Научно-популярная серия

Е. Я. ГИК

# МАТЕМАТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1976



В книге рассказывается о разнообразных связях, существующих между математикой и шахматами: о математических легендах о происхождении шахмат, об играющих машинах, о необычных играх на шахматной доске и т. д. Затронуты все известные типы математических задач и головоломок на шахматную тему: задачи о шахматной доске, о маршрутах, силе, расстановках и перестановках фигур на ней. Рассмотрены задачи «о ходе коня» и «о восьми ферзях», которыми занимались великие математики Эйлер и Гаусс. Дано математическое освещение некоторых чисто шахматных вопросов — геометрические свойства шахматной доски, математика шахматных турниров, система коэффициентов Эло.

Ответственный редактор—

доктор физико-математических наук  
Н. Я. ВИЛЕНКИН

Евгений Яковлевич Гик  
МАТЕМАТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Утверждено к печати редколлегией серии  
научно-популярных изданий Академии наук СССР

Редактор издательства Е. М. Кляус. Художник Е. К. Самойлов  
Художественный редактор В. Н. Тикуннов  
Технический редактор Л. В. Каскова  
Корректор Р. П. Шаблеева

Сдано в набор 9/XII 1975 г. Подписано к печати 13/V 1976 г.  
Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага №1. Усл. печ. л. 9,24  
Уч.-изд. л. 9,3. **Доп. тиража 100 000**  
Т-10804. Тип. зак. 95. Цена 31 коп.

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62,  
Подсосенский пер., 21  
2-я типография издательства «Наука». 121099,  
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

Г 20201—024  
054(02)—76 2—75НП © Издательство «Наука», 1976 г.

- 20764 -



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди сокровищ гробницы Тутанхамона (египетского фараона начала XIV в. до н. э.), которые в 1973 г. экспонировались в московском Музее изобразительных искусств, можно было увидеть игральную доску, разделенную на тридцать квадратов, и стоящие на ней фигурки конической и катушкообразной формы<sup>1</sup>. Игральные доски находили и в еще более древних захоронениях Месопотамии. Конечно, это — еще не шахматы, а какой-то их дальний родственник, более близкий современным нардам. Однако можно, по-видимому, считать установленным, что игры, связанные с передвижением фигур по расчерченной доске, существуют, по крайней мере, три с половиной — четыре тысячи лет. «И я даже готов утверждать, — пишет Г. Картер, открывший гробницу Тутанхамона, — что современные игры, требующие настоящего умения, такие, как «сига», или шашки, или шахматы, по всей видимости, произошли от азартных игр, подобных тем, которые мы находим время от времени в египетских гробницах...»<sup>2</sup>

В коллекции Британского музея хранится так называемый Папирус Ринда<sup>3</sup>, изготовленный египетским писцом Ахмесом около 1550 г. (по другим источникам — около 1700 г.) до н. э. и переписанный с еще более раннего папируса. В нем содержится несколько десятков конкретных математических задач с их решениями; эти задачи относятся к действиям с дробями, вычислениям длин и площадей, определению количества хлебов, которые можно выпечь из данного количества зерна, и т. п. Математиче-

<sup>1</sup> «Сокровища гробницы Тутанхамона (Каталог выставки)». М., «Советский художник», 1973, № 46.

<sup>2</sup> Г. Картер. Гробница Тутанхамона. М., Изд-во восточной литературы, 1959, стр. 240.

<sup>3</sup> Хорошая репродукция фрагмента этого папируса открывает сборник «Математика в современном мире» (М., «Мир», 1967).

ские таблицы встречаются среди клинописных текстов Месопотамии, датированных приблизительно 2000 г. до н. э. Таким образом, математическая литература — а вместе с ней и математика как особая область знания, осознающая себя таковой, — также насчитывает не менее трех с половиной — четырех тысяч лет.

Итак, и шахматы, и математика уходят своими корнями в глубокую древность. Разумеется, не в этом основа того сродства между ними, которое интуитивно ощущается всеми и которое ведет к известной конкуренции между этими двумя сферами интеллектуальной деятельности. Сродство это состоит в абстрактном и аксиоматическом характере математики и шахмат.

Подобно тому как математика абстрагируется от конкретности рассматриваемых ею объектов и изучает отношения и формы в чистом виде, так и для шахмат безразлично, из чего сделана доска (в то время как, скажем, для футбола качество травяного покрытия имеет немалое значение), что из себя представляют поля (важно лишь знать, сколько их и какие из них смежны друг с другом) и какого вида шахматные фигуры (существенно лишь, как они ходят). Подобно тому как шахматная партия разворачивается в точном соответствии с правилами игры, не оставляющими сомнения, какой ход возможен, а какой — нет, так и математическая теория развивается на основе своих «правил игры» — аксиом и правил вывода из них; как и шахматный ход, каждый этап математического доказательства должен быть разрешен правилами. Решение шахматной задачи так же неоспоримо, как доказательство математической теоремы: вся шахматная игра целиком укладывается в рамки математики, представляя собой один из видов так называемых исчислений. Шахматное исчисление, однако, весьма сложно и пока что не поддается (и неизвестно, поддастся ли когда-нибудь) изучению «до конца» — с тем, скажем, практическим выходом, чтобы уметь указывать наилучшие ходы в различных позициях (хотя такие ходы заведомо существуют и даже в принципе существует алгоритм, указывающий для каждой позиции наилучший ход: этот алгоритм может быть найден, например, путем перебора всех мыслимых партий, которых, как следует из цифр, приведенных в главе 12 этой книги, имеется никак не больше, чем  $24866^{11796}$ ).

Таким образом, исчерпывающая монография о связях шахмат с математикой пока еще не может быть написана. Однако можно выделить область таких связей, где появление соответствующей книги давно назрело. Речь идет о жанре, условно называемом «занимательные задачи». Одна из таких задач, уходящая в глубины математического фольклора, связана как раз с легендой о зарождении шахмат; это задача о числе зерен на шахматной доске; с нее начинается и повествование в данной книге. Задачи, так или иначе связанные с шахматами, часто встречаются на математических олимпиадах, на занятиях математических кружков для школьников, на страницах популярных математических журналов, брошюр, задачников. Шахматная тематика нашла свое отражение и в одной из самых замечательных популярных книг по математике — в «Математическом калейдоскопе» Г. Штейнгауза. (Краткий обзор литературы по этой тематике приведен ниже, на стр. 10—11.) Задачами о движении коня и расстановке ферзей занимались великие математики Леонард Эйлер и Карл Гаусс. Тем удивительнее, что после выхода в свет в 1935 г. небольшой (87 страниц) книги Л. Я. Окунева «Комбинаторные задачи на шахматной доске», давно уже ставшей довольно редкой (и к тому же явно стоящей намного ближе к алгебре, чем к шахматам), на русском языке не было выпущено ни одной шахматно-математической книги.

Появление книги Е. Я. Гика поэтому совершенно своевременно и уместно. Тем более, что разносторонность ее автора (он — выпускник механико-математического факультета Московского университета, кандидат наук по специальности «техническая кибернетика», мастер спорта СССР по шахматам, член Союза журналистов СССР) дает ему право написать такую книгу.

Рекомендуемая вниманию читателей популярная книга будет интересна и любителям математики, и любителям шахмат. Написанная с должной математической строгостью, она затрагивает и шахматную реальность: достаточно сказать, что в ней рассматриваются (с математической точки зрения) позиция, встретившаяся в партии на первенство мира 1951 г. (стр. 34), и трудности, вставшие перед устроителями матча СССР—Югославия в 1970 г.

Первая глава носит вводный характер. В ней излагаются шахматные легенды прошлого (о зарождении



шахмат и их связях с магическими квадратами) и настоящего (о создании шахматной машины, которая в конце концов станет чемпионом мира). Предметом последних двух глав служат математические вопросы, возникающие при организации шахматных состязаний — от вычисления так называемых коэффициентов Эло, характеризующих индивидуальную силу шахматиста в данный момент, до построения рациональных расписаний.

В остальных двенадцати главах приведены едва ли не все известные разновидности математических задач на шахматной доске. Автор сумел собрать их из разнообразных, в том числе малодоступных источников, удачно классифицировать и довольно компактно и вместе с тем живо изложить.

Глава вторая посвящена в основном шахматной доске самой по себе, как геометрическому объекту, без участия шахматных фигур. Фигуры появляются в главе третьей, причем наибольшее внимание уделяется длине проходимо-го ими пути; показывается, как оценка этой длины может принести пользу при анализе шахматных окончаний. Самая популярная шахматная фигура — конь — служит предметом четвертой и пятой глав. Четвертая глава — пример сведения воедино шахматной и математической проблематики: отправляясь от свойства коня менять цвет поля при каждом ходе, автор предлагает основанные на этом свойстве решения как шахматных этюдов, так и математических задач; шахматный термин «ретроградный анализ» соседствует здесь с математическим термином «граф». Пятая глава целиком посвящена знаменитой задаче Эйлера об обходе конем всех полей шахматной доски. В главе шестой излагается ряд комбинаторных и занимательно-шахматных задач, связанных с расстановкой и движением ладей.

Седьмая глава содержит различные задачи о движении и расстановке ферзей. Она открывается задачей о *доминирующих* ферзях, т. е. о таких ферзях, которые в своей совокупности держат под боем все поля доски. В восьмой главе, напротив, исследуется задача о *независимых* ферзях, т. е. о таких, из которых ни один не бьет другого; эта задача знаменита тем, что ею занимался Гаусс. В девятой главе минимальное число доминирующих фигур и максимальное число независимых фигур вычисляется для королей, ладей, слонов, коней и пешек. Для полноты

картины стоило бы, пожалуй, привести позиции с доминирующими и независимыми пешками и для случая, когда этим пешкам разрешается быть разных цветов (для прочих фигур цвет не играет, разумеется, никакой роли в вопросах независимости и доминирования).

В главе десятой предпринимается попытка выразить в цифрах, причем математически убедительно, сравнительную силу шахматных фигур. Эта проблема не может не занимать и практического шахматиста, и математика, составляющего программу шахматной игры для вычислительной машины. Все знают, конечно, что сила той или иной фигуры зависит от конкретной ситуации на доске и что нетрудно придумать позицию, где конь оказывается сильнее ферзя; но никто не сомневается, вместе с тем, что ферзь все-таки более сильная фигура, нежели конь. Естественно считать фигуру тем сильнее, чем большее число полей она может бить; это число угрожаемых полей зависит от исходной позиции фигуры, и для всех фигур, кроме пешки (которая ходит одним способом, а бьет — другим), совпадает с числом полей, достижимых из данного поля за один ход. Вычисляя число достижимых полей для каждого возможного для данной фигуры исходного поля, складывая эти числа и деля их на число возможных исходных полей, мы получаем количественно выраженную оценку средней силы фигуры. Соответствующие цифры приведены на стр. 116. Замечательно, что они не слишком расходятся с шахматной традицией, хотя предложенный способ вычисления, по меньшей мере, по двум причинам может рассматриваться лишь как самое первое приближение к истинной силе фигур (если такое понятие вообще имеет смысл). Во-первых, не совсем ясно, насколько проводимые вычисления отражают силу пешки, поскольку для нее угрожаемые поля не совпадают с достижимыми; кроме того, если вести расчет не на один ход, а, скажем, на два, то пешка, стоящая на предпоследней горизонтали, получает, ввиду превращения, гораздо более широкие возможности движения. Во-вторых, вычисления для каждой фигуры проводятся в искусственной ситуации, когда на доске расположена только эта фигура; число достижимых полей, конечно, изменится, если на доске будут стоять и другие фигуры: ферзь, окруженный со всех сторон фигурами своего цвета, имеет ноль достижимых полей, в то время как конь в том же положении может иметь их восемь. Разумеется, подсчет



числа достижимых полей не только для каждого исходного поля (как это сделано в книге), но и для каждой дислокации фигур на остальных полях вызывает колоссальные трудности.

Одиннадцатая глава вновь возвращает читателя к занимательному жанру. Здесь рассматриваются позиции, в которых требуется произвести перестановку фигур, подчиненную тем или иным условиям; излагается остроумный метод «пуговиц и нитей», нередко помогающий при решении подобных головоломок. В двенадцатой главе конструируются партии и позиции, отдельные характеристики которых являются рекордно большими или рекордно малыми — например, самые короткие партии, приводящие к мату, пату или «голым» королям, и позиции с самым большим числом ходов или шахов. Одни из этих рекордов являются абсолютными — в том смысле, что не могут быть улучшены; другие всего лишь относительными, но зато представляющими тем самым читателю возможность получить улучшенный результат.

В главе тринадцатой рассматриваются некоторые обобщения шахматной игры. К ним относятся как игры на обычной шахматной доске, но с необычными правилами, так и игры на необычных досках. Подобные игры отнюдь не являются только плодом чистого воображения. Так, предложенная Мартином Гарднером игра в «уполовиненные шахматы» (доска  $5 \times 5$ , и у каждой стороны по пять пешек и по одной фигуре каждого вида, причем пешке запрещено ходить на два поля сразу) пользуется популярностью у московских школьников, а знаменитый Капабланка с целью преодолеть казавшуюся ему неотвратимой «ничейную смерть» шахмат играл (и выиграл со счетом  $3 : 1$ ) в 1929 г. матч с венгерским гроссмейстером Мароци на доске  $16 \times 12$  с удвоенным комплектом фигур (начальный ход пешки возможен сразу на три поля, а для победы достаточно заматовать любого из королей противника). Обе эти игры естественно дополняют перечень, приведенный в главе 13.

Можно надеяться, что «Математика на шахматной доске» доставит читателям несколько часов удовольствия и что в недалеком будущем появится более обстоятельная книга на ту же тему.

*Профессор В. А. Успенский*



## ШАХМАТНАЯ МАТЕМАТИКА

У математики и шахмат много родственного.

Формы мышления математика и шахматиста довольно близки, и не случайно математические способности часто сочетаются с шахматными. Достаточно упомянуть имена чемпионов мира по шахматам. Математикой интересовался первый шахматный король В. Стейниц. Известным математиком был его преемник Эм. Ласкер. Нынешний президент ФИДЕ экс-чемпион мира М. Эйве возглавлял голландский вычислительный центр. Первый советский чемпион мира доктор технических наук М. Ботвинник в последние годы занимается созданием алгоритма шахматной игры для ЭВМ. Математическими способностями обладают также М. Таль и А. Карпов, однако ради шахмат они вынуждены были «пожертвовать» математикой... (Конечно, между шахматной игрой и занятиями математикой имеются и различия, в том числе и в типе мышления.)

Шахматная доска, фигуры и сама игра часто используются для иллюстрации разнообразных математических понятий и задач. Шахматные термины можно встретить в литературе по комбинаторике, теории графов, теории чисел, вычислительной математике, теории игр. Во второй половине XX в. возникла новая область, объединяющая математику и шахматы, — машинные шахматы. Разрабатываемые в шахматном программировании математические методы применяются для решения других, более актуальных проблем. О некоторых шахматных успехах ЭВМ будет рассказано в настоящей книге.

Еще одна точка соприкосновения математики и шахмат — это популярный жанр занимательной математики: математические игры и задачи на шахматной доске. Будем называть этот жанр *шахматной математикой* (кажется, такой термин до сих пор не использовался). Почти в каждом олимпиадном сборнике или книге головоломок и развлечений можно найти остроумные и красивые задачи

с участием шахматной доски и фигур. Многие из них имеют интересную историю, привлекали к себе внимание известных математиков. Например, задачей о ходе коня занимался Леонард Эйлер, а задачей о расстановке восьми ферзей — Карл Гаусс.

Именно последней из указанных тем — шахматной математике — и посвящена в основном настоящая книга. В ней рассматриваются самые разнообразные типы шахматно-математических задач (о шахматной доске, о маршрутах, расстановках и силе фигур), рассказывается о шахматно-математических рекордах, о математических играх на шахматной доске.

Охватить весь жанр шахматной математики, тем более в одной небольшой книжке, практически невозможно. Если бы мы привели исчерпывающие решения и доказательства только тех задач и утверждений, которые содержатся в книге, то уже тогда ее объем увеличился бы раза в три. Вот почему для многих задач даны лишь краткие решения, а то и просто одни ответы. Полные же решения приводятся, как правило, только в тех случаях, если они не требуют громоздких вычислений и, кроме того, не лишены, на вкус автора, некоторого изящества. Многие шахматно-математические задачи и игры кочуют из одного сборника в другой без ссылок и довольно трудно определить, кто их первый придумал. Однако авторы наиболее интересных и ярких задач и решений в книге указываются. Заметим, что многие задачи и игры публикуются здесь впервые.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой и шахматами. Для ее чтения достаточно обладать лишь элементарными познаниями в этих областях. Она вполне может быть использована в работе математических и шахматных кружков. Книга предназначена не только для любителей занимательной математики, но и для шахматистов, которые найдут в ней математическое освещение некоторых чисто шахматных вопросов, таких как система коэффициентов Эло, геометрия шахматной доски, составление турнирных расписаний.

Несколько слов о литературе, посвященной шахматной математике. На русском языке имеется только одна специальная книга, изданная сорок лет назад: Л. Окунев «Комбинаторные задачи на шахматной доске». Как «книгу в книге» можно рассматривать также шахматно-математи-

ческий раздел в книге известных математиков А. Яглома и И. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении».

Среди зарубежных авторов прежде всего следует упомянуть бельгийского популяризатора математики М. Крайчика. В его работах шахматной математике уделено много внимания, особенно в книге «Математические игры и развлечения».

Широко шахматно-математическая тематика представлена в книгах американского математика и популяризатора М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения», «Математические досуги» и «Математические новеллы»; все они переведены на русский язык.

В Югославии шахматной математикой занимается гроссмейстер по шахматной композиции Н. Петрович. Более двадцати лет он ведет шахматно-математический отдел в журнале «Проблемы»; материалы на эту тему можно найти также в его книге «Шахматные проблемы».

В ФРГ издана книга шахматных проблемистов Э. Бонсдорфа, К. Фабеля и О. Риихимаа «Шахматы и число», содержащая значительное число шахматно-математических задач (из трех авторов этой книги более известен доктор Фабель).

В дальнейшем, обращаясь к именам Окунева, Яглов, Крайчика, Гарднера, Петровича и Фабеля, мы будем иметь в виду упомянутые работы.

Список литературы приведен в конце книги. Составить полную библиографию по шахматно-математической тематике — дело нереальное. В нее следовало бы включить, в частности, большинство книг по занимательной математике, которых только на русском языке имеется более трехсот<sup>1</sup>. Наша тема отражена также в различной шахматной литературе, например, в книге Е. Гижицкого «Шахматы через века и страны». По ходу изложения мы будем ссылаться и на другие источники, содержащие шахматно-математический материал.

---

<sup>1</sup> Соответствующая библиография дана в приложениях к упомянутым книгам М Гарднера.



## Глава 1

### ЛЕГЕНДА О МУДРЕЦЕ И ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Начнем наш рассказ о математике на шахматной доске с одной легенды о происхождении шахмат. Эта легенда связана с математическим расчетом, который приводит к неожиданному результату.

Шахматы, как известно, одна из самых древних игр. Английский востоковед Г. Мэррей в своей «Истории шахмат» датирует возникновение игры V в. нашей эры. А совсем недавно в Узбекистане были обнаружены старинные шахматные фигуры, которые археологи относят ко II в. нашей эры. Поскольку шахматы имеют столь древнюю историю, не удивительно, что с ними связаны различные предания и легенды, правдивость которых за давностью времени, невозможно проверить. Вот старинная легенда об изобретателе шахмат.

Когда персидский шах (а в некоторых вариантах легенды — индийский царь) познакомился с шахматами, он был восхищен их остроумием и обилием возможных комбинаций. Узнав, что мудрец, который изобрел игру, является его подданным, шах позвал его, чтобы лично наградить за гениальную выдумку. Властелин пообещал выполнить любую просьбу мудреца и был удивлен его скромностью, когда тот пожелал получить в награду пшеничные зерна. На первое поле шахматной доски — одно зерно, на второе — два, и так далее — на каждое последующее вдвое больше зерен, чем на предыдущее. Персидский шах приказал побыстрее выдать изобретателю шахмат его ничтожную награду. Однако на следующий день придворные математики сообщили своему повелителю, что не в состоянии исполнить желание хитрого мудреца. Оказалось, что для этого не хватит пшеницы, хранящейся не только в амбарах персидского шаха, но и во всех амбарах мира. Мудрец скромно потребовал

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

зерен. Это фантастически большое число записывается

двадцатью цифрами. Подсчет показывает, что амбар для хранения необходимого зерна (высотой 4 и шириной 20 метров) должен простираться от Земли до Солнца. Прямо скажем, связь с математикой здесь весьма условна, однако неожиданная развязка в истории с мудрецом и персидским шахом наглядно иллюстрирует грандиозные математические возможности, скрывающиеся в шахматной игре.

Другую «историческую» связь шахмат и математики представляет собой гипотеза, согласно которой шахматы произошли из магических квадратов. По-видимому, эта гипотеза впервые была высказана в прошлом веке английским математиком Кессоном, опубликовавшим несколько статей под названием «Магические квадраты Каиссы» (по имени шахматной музы Каиссы, героини одноименной поэмы У. Джонса). Позднее ее отстаивал также Н. Рудин <sup>2</sup>.

Магический (или волшебный) квадрат порядка  $n$  представляет собой квадратную таблицу  $n \times n$ , заполненную всеми целыми числами от 1 до  $n^2$  и обладающую следующим свойством: сумма чисел каждой строки, каждого столбца и двух главных диагоналей одна и та же. Для магических квадратов порядка 8 (а нас, естественно, интересуют только такие) эта сумма, как легко подсчитать, равна 260. На рис. 1 элементы (числа) магического квадрата расположены прямо на полях шахматной доски.

Своеобразная мозаика чисел в магических квадратах придает им волшебную силу произведений искусства. Недаром выдающийся немецкий художник А. Дюрер был настолько очарован магическими квадратами, что воспроизвел один из них в своей знаменитой гравюре «Меланхолия».

Рассмотрим одну из старинных дебютных табий (начальных расположений фигур) под названием «альмуджаннах». Она получается из современного начального положения при помощи следующих симметричных ходов белых и черных: 1. d2—d3 d7—d6 2. e2—e3 e7—e6 3. b2—b3 b7—b6 4. g2—g3 g7—g6 5. c2—c3 c7—c6 6. f2—f3 f7—f6 7. c3—c4 c6—c5 8. f3—f4 f6—f5 9. Kb1—c3 Kb8—c6 10. Kg1—f3 Kg8—f6 11. La1—b1 La8—b8 12. Lh1—g1 Lh8—g8 (рис. 1).

<sup>2</sup> Н. Рудин. От магического квадрата к шахматам. М., «Просвещение», 1969.

Подсчитав сумму чисел, стоящих на восьми полях: d2, d3, e2, e3, d6, d7, e6, e7, участвующих в первых двух ходах, неожиданно мы получим магическое число 260. То же число будет получаться и для каждой последующей пары приведенных ходов. Основываясь на подобного рода примерах (число их можно увеличить), Рудин и строит свою гипотезу о связи магических квадратов с шахматами. А исчезновение всех следов такой связи он объясняет тем, что в ту далекую эпоху суеверий и мистики древние индусы и арабы приписывали числовым сочетаниям магических квадратов таинственные свойства, и поэтому квадраты тщательно скрывались, как и все с ними связанное.

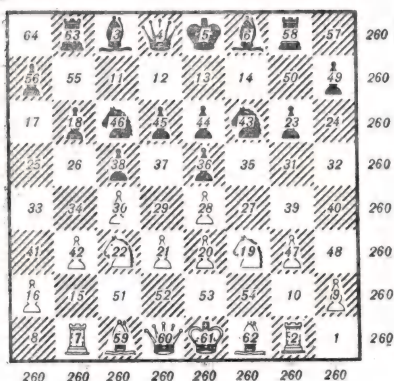


Рис. 1. Альмуджаннах и магический квадрат

Для этого, видимо, и выдумывались легенды об изобретателе шахмат.

Теперь перейдем к современной связи между шахматами и математикой. Разумеется, речь пойдет о необычайно популярной в наши дни теме — шахматной игре электронных вычислительных машин (ЭВМ)<sup>3</sup>. Конечно, остановиться на этой теме сколько-нибудь подробно мы просто не в состоянии — одна библиография составила бы целую книгу. Игре шахматных автоматов посвящены сотни статей, дискуссий и споров, это также излюбленная тема писателей-фантастов.

Программированием шахматной игры на ЭВМ всерьез занимаются многие коллективы математиков, создано

<sup>3</sup> Точнее было бы говорить об «игре программ», а не об «игре машин» (на одной машине могут играть друг с другом две программы!); мы пользуемся обоими общепринятыми выражениями.



большое число различных программ. В 1967 г. состоялся исторический «машинный» матч СССР—США, в котором со счетом 3 : 1 победила советская программа. В ее создании участвовали математики Г. Адельсон-Вельский, В. Арлазаров, А. Битман, А. Животовский и А. Усков <sup>4</sup>. В дальнейшем к ним присоединились также математики А. Бараев и М. Донской <sup>5</sup>. Позднее этой программе было дано романтическое имя «Каисса» (в честь богини шахмат Каиссы). С каждым годом «Каисса» улучшает свою игру. Так, в 1972 г. в матче с читателями «Комсомольской правды» из двух партий одну ей удалось свести вничью. Ниже мы еще расскажем об одном выдающемся успехе «Каиссы». Интересно, что кандидатская диссертация В. Арлазарова (заведующего лабораторией Института проблем управления, в которой рождена «Каисса») так и называется — «Некоторые вопросы программирования шахматной игры»!

Повышенный интерес математиков к этой теме, разумеется, вызван не желанием лишить шахматистов их любимой игры. Дело в том, что шахматы являются прекрасной моделью многих актуальных задач. Математики, занимающиеся программированием шахмат, надеются, что разрабатываемые ими методы будут использованы значительно шире.

Известно, что ЭВМ хорошо решает задачи, в которых точно задана последовательность действий (алгоритм) и основная трудность заключается в огромном объеме вычислений. Однако в реальных ситуациях зачастую невозможно сформулировать точные правила поведения. При этом человек действует интуитивно, эвристически, иногда подсознательно принимая правильное решение. Потребность научить ЭВМ решать задачи аналогичным образом привела к созданию нового раздела кибернетики — эвристического программирования (при этом часто говорят также о создании искусственного интеллекта). Именно при проверке методов эвристического программи-

---

<sup>4</sup> Основные идеи программы авторы изложили в фундаментальной работе «О программировании игры вычислительных машин в шахматы» («Успехи матем. наук», 1970, 25, № 2).

<sup>5</sup> Некоторые результаты, полученные создателями «Каиссы» в последние годы, содержатся в сборнике «Проблемы кибернетики» (М., «Наука», 1974, вып. 29). В частности, в статье М. Донского «О программе, играющей в шахматы» изложены новые идеи шахматного программирования.

рования шахматы играют важную роль. Опыт создания шахматных программ позволит с большим эффектом использовать ЭВМ для управления сложными производственными и экономическими объектами.

Шахматная игра обладает важными для кибернетики свойствами: в ней имеются четкие правила выполнения операций (ходы) и конечная цель (мат), а дискретный характер соответствует цифровой природе ЭВМ. Эти свойства определяют интерес к шахматам и в другом разделе кибернетики — теории игр, в литературе по которой шахматы упоминаются весьма часто<sup>6</sup>. Впрочем, разрабатываемые в этой теории методы эффективно используются только для игр с небольшим числом возможных ходов и ситуаций и поэтому шахматам дать ничего не могут. Заметим попутно, что, по мнению В. Гуарария, шахматы могут быть подвергнуты основательному изучению посредством целого комплекса наук, в основном математических: теория вероятностей, теория больших систем, исследование операций, теория оптимизации и т. д.<sup>7</sup>

Число возможных шахматных позиций хотя и фантастически велико, но конечно. Верхние оценки для него получены в различной литературе. Грубую оценку найти несложно, покажем это. Данное поле доски может быть занято одной из шести фигур белых или черных или может быть свободно. Таким образом, всего для поля имеется 13 возможностей. Поскольку на доске 64 поля, то возможных шахматных позиций не более  $13^{64}$ . Конечно, здесь учтено множество заведомо не существующих позиций, например с числом фигур, большим 32. Можно различным образом уточнять оценку, но сейчас нас интересует лишь сам факт ее существования.

Из конечности числа шахматных позиций следует, что, перебрав все варианты на необходимую глубину, про каждую позицию, в том числе исходную, можно установить, ничейна она или является выигранной для одной из сторон<sup>8</sup> (теоретический алгоритм для такого «присуждения»

<sup>6</sup> Специальная статья на эту тему «Шахматы и теория игр» опубликована К. Винкельбауэром в «Probl. cybernetiky» (Praha, 1965).

<sup>7</sup> Частично соображения В. Гуарария содержатся в статье «Наука и шахматы» («Шахматы», 1973, № 22, 24; 1974, № 4).

<sup>8</sup> Строгое доказательство этого факта впервые было дано Э. Цермело в 1911 г. (см.: Э. Цермело. «О применении теории множеств к теории шахматной игры». — В сб.: «Матричные игры». М., Физматгиз, 1961).

20764-  
позиций описан, например, Н. Криницким во введениях к упомянутым ниже книгам М. Ботвинника). Впрочем, осуществить такой эксперимент (например, для начальной позиции) практически невозможно. Известно, что если бы все человечество со времен Адама и Евы только тем и занималось, что играло в шахматы, то и тогда бы все позиции (и партии) еще до сих пор не были исчерпаны...


Принципы шахматных программ для ЭВМ впервые были сформулированы в начале 50-х годов известным американским кибернетиком К. Шенноном<sup>9</sup>. Прежде всего, вводится так называемая оценочная функция, сопоставляющая каждой позиции определенное число (оценку). Можно, например, сложить силы белых и черных фигур (по одной из шкал, указанных в главе 10) и в качестве оценки позиции взять разность между полученными суммами. Просмотрев все варианты на заданную глубину, машина выбирает ход, ведущий к позиции с максимальной оценкой.

Увеличивая число ходов, на которое ведется расчет, можно улучшить игру машины. Но уже при небольшом увеличении глубины расчета время, которое машина будет затрачивать на выбор хода, становится чрезвычайно большим. С другой стороны, можно уточнять оценочную функцию, учитывая, скажем, не только материальные факторы (силу фигур), но и позиционные (открытые линии, сдвоенные пешки, активность и т. д.). Однако и это средство вряд ли позволит достичь должного эффекта. При фиксированной глубине расчета машина может прекратить его как раз там, где он более всего необходим. Кроме того, значительная часть машинного времени уйдет на рассмотрение вариантов, заведомо не заслуживающих внимания.

Основной путь улучшения игры машины заключается в приближении ее к принципам игры шахматиста, который, как известно, рассматривает лишь небольшое число вариантов, уделяя максимум внимания лучшим, с его точки зрения, продолжениям. При этом он часто оценивает позицию из общих соображений, полагаясь на собственный опыт и интуицию. Цель эвристического программирования как раз и состоит в том, чтобы вместо полного перебора

<sup>9</sup> К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. М., ИЛ, 1963.

W





вариантов научить машину ограничиваться наиболее перспективными (как в шахматной игре, так и при решении других сложных и важных задач). В этом направлении главным образом и ведутся исследования современных математиков. Так, «Каисса» во многих ситуациях уже отказывается от полного перебора вариантов. Идея сокращения перебора лежит и в основе «метода горизонта», предложенного М. Ботвинником<sup>10</sup>. Заметим, что любой метод сокращения перебора в шахматных программах, по существу, является методом направленного поиска, широко используемого в прикладной математике.

Другой возможный путь «усиления» машины состоит в овладении искусством самообучаться, т. е. использовать опыт ранее сыгранных партий. Для некоторых сравнительно простых игр такие машины уже созданы. Самообучающийся шахматный автомат мог бы стать предшественником самосовершенствующегося электронного мозга, неограниченно развивающего свои способности!

Примечательным событием в истории шахмат и математики явился первый чемпионат мира по шахматам среди вычислительных машин, состоявшийся в 1974 г. в Стокгольме под эгидой Международной федерации по обработке информации (ИФИП). Этот чемпионат был приурочен к 25-летию работ в области шахматного программирования. И первой чемпионкой мира среди компьютеров стала советская программа «Каисса»! Она оказалась сильнее 12 программ, «приехавших» из США, Канады, Австрии и других стран.

Поскольку наша книга — не учебник шахматной игры, в ней не приводится ни одной «человеческой» партии. Однако думаем, что с одной из партий ЭВМ читатель ознакомится с интересом (хотя «Каисса» играет пока в лучшем случае в силу третьего разряда). Прокомментируем кратко заключительную, решающую победу «Каиссы» на чемпионате мира<sup>11</sup>.

---

<sup>10</sup> М. Ботвинник. Алгоритм игры в шахматы. М., «Наука», 1968; М. Ботвинник. О кибернетической цели игры. М., «Советское радио», 1975.

<sup>11</sup> Подробно о чемпионате рассказывается в статьях М. Донского «Чемпионат мира среди шахматных программ» («Квант», № 12, 1974) и В. Хенкина «„Каисса“ — чемпион мира» («Наука и жизнь», № 1, 1975).

## «Острич» — «Каисса»

(США)

(СССР)

*Дебют ферзевых пешек*

1. Kg1—f3 e7—e6 2. d2—d4 Kg8—f6 3. Ce1—g5 d7—d5 4. e2—e3 Cf8—e7 5. Kb1—c3. Неожиданный для «Каиссы» ход, она готовилась к 5. c4.

5... Ce7—b4? Не совсем логично. 6. Cg5:f6 Cb4:c3 + 7. b2:c3 Фd8:f6 8. Cf1—d3 c7—c5 9. 0—0 0—0 10. Фd1—d2 Kb8—c6 11. d4:c5 Фf6—e7 12. c3—c4 d5:c4 13. Cd3:c4 Фе7:c5 14. Фd2—d3 Лf8—d8. Лучше было 14... b6, заканчивая развитие фигур. Теперь черные начинают испытывать некоторые затруднения.

15. Фd3—e4 b7—b5 16. Ce4—d3 f7—f5 17. Фе4—h4 e6—e5. Активные ходы пешками не приводят к добру. 18. e3—e4? «Острич» боится вилки, между тем 18. a4! c4 (если 18... ba или b4, то 19. Cc4+Kph8 20. Kg5) 19. C:b5 ef 20. C:c6 сразу решало исход борьбы.

18. ... f5—f4 19. Лf1—e1 Cc8—b7? После 19... h6 позиция черных была вполне надежна, однако зевают не только люди, но и машины!

20. Kf3—g5 h7—h6 21. Kg5—e6 Фc5—b6 22. Ke6: d8 Ла8:d8 23. a2—a4 b5—b4 24. Cd3—c4 + Kpg8—h8 25. Ла1—d1 Ke6—d4 26. Лd1—c1? Выигрывало 26. Фе7 Лc8 27. Cb3, после чего теряется одна из пешек b4 или e5, а взятие конем на b3 или c2 невозможно из-за 28. Лd7. «Каисса» снова выходит сухой из воды.

26 ...Cb7—e6 27. c2—c3 b4:c3 28. Лc1:c3 Ce6:a4 29. Фh4—e7 Kd4—c6 30. Фе7—f7 Фb6—c5 31. Лc3—d3 Ke6—d4 32. Ce4—d5. Здесь «Каисса» могла форсировать ничью изящной комбинацией: 32... Ke2+! 33. Kpf1 Cb5 34. Лd2 Kg3+ 35. Kpg1 Ke2+ с вечным шахом. Перестановка ходов снова ставит черных на грань поражения.

32 ...Ca4—b5 33. Лd3—h3 Kd4—e2+ 34. Kpg1—h1 Фc5:f2. Белые могли объявить форсированный мат: 35. Л:h6+ gh 36. Фf6+ Kph7 37. Фе7+ Kpg6 38. Фf7+ Kpg5 39. Фg7+ Kph5 40. Cf7+ Kph4 41. Ф:h6+ Kpg4 42. Ce6 мат, но, к счастью, машина так далеко не считает...

35. Ле1—d1 Фf2—b6 36. Лd1—b1 Лd8—c8 37. Cd5—e6 Лc8—d8. Снова «Каисса» упускает возможность нанести эффектный удар: 37...Cd7!, и белые вынуждены дать вечный шах после 38. Л:h6+.

38. Фf7—g6! Фb6—b7 39. Фg6—f5. В этот момент «Острич» находился в цейтноте, иначе он наверняка бы нашел простой выигрыш: 39.Л:h6+ gh 40. Ф:h6+ Фh7 41. Фf6+.

39 ...Фb7—c7 40. Лh3—h4 Кe2—d4 41. Фf5—h3 Кd4:e6 42. Фh3:e6 Сb5—d3 43. Лb1—g1 Cd3—c4? Пути электронного мозга неисповедимы, почему не 43...С:e4?

44. Фе6—f5 Сc4—e2 45. Лg1—a1 a7—a5 46. Фf5—g6 a5—a4! «Остричу» давно следовало подключить к игре ладью h4, «Каисса» пользуется растерянностью соперника и получает решающий перевес.

47. Ла1—e1 Се2—c4 48. Ле1—a1 a4—a3! 49. Ла1—b1 Фc7—d6 50. Фg6:d6 Лd8:d6 51. Лh4—h3 a3—a2 52. Лb1—c1 Лd6—d4 53. Лh3—c3 Лd4:e4 54. Лc1—a1 Ле4—d4 55. Лc3:c4. Жертва отчаяния. 55 ...Лd4: c4 56. g2—g3 f4—f3 57. h2—h3 Лc4—c2, и через десять ходов «Каисса» объявила мат.

В свое время «отец кибернетики» Н. Винер довольно пессимистически оценивал шахматные перспективы ЭВМ. Надо признать, что и сегодня машины еще не в состоянии всерьез конкурировать с шахматными мастерами (приведенная партия лишний раз убеждает нас в этом). И если настоящий шахматный матч между гроссмейстером и машиной когда-нибудь и состоится, то это дело далекого будущего. В некоторых же вопросах машина уже сегодня может оказать помощь шахматистам. Известно, например, что в наш век научно-технической революции актуальной является проблема переработки и хранения информации, объем которой угрожающе растет. Эта проблема достаточно остро ощущается и в шахматах — тем более, что число крупных турниров с каждым годом увеличивается. Гроссмейстеры и мастера уже просто физически не успевают проанализировать все интересующие их партии и дебютные варианты. Создание информационно-поисковой системы на базе ЭВМ могло бы значительно облегчить эту работу, особенно при подготовке к ответственным соревнованиям.

Машина могла бы также проверять шахматные задачи, что немаловажно, поскольку даже в произведениях крупных шахматных композиторов иногда встречаются ошибки. Правда, с этюдами машине справиться труднее, так как здесь расчет не ограничен числом ходов.



## ЗАДАЧИ О ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Подробный рассказ о шахматной математике, к которому мы сейчас приступаем, естественнее всего начать с математических задач о самой доске, пока что не расставляя на ней никаких фигур. Именно этой теме и посвящена настоящая глава.

Рассмотрим прежде всего несколько задач о покрытии доски костями домино размером  $2 \times 1$ . Всюду предполагается, что каждое домино покрывает два поля доски, а каждое поле покрыто одной половиной домино. Начнем со следующей старинной задачи.

*Можно ли покрыть домино квадрат размером  $8 \times 8$ , из которого вырезаны противоположные угловые клетки (рис. 2, а)?*

Мы могли бы воспользоваться алгебраическими рассуждениями<sup>12</sup>, однако «шахматное» решение и проще, и изящнее. Окрасим наш урезанный квадрат в черно-белый цвет, превратив его в шахматную доску без двух угловых полей  $a8$  и  $h1$  (рис. 2, б). При любом покрытии доски каждое домино покрывает одно белое и одно черное поле. У нас же белых полей на два меньше, чем черных (вырезанные поля — белые), и поэтому необходимого покрытия не существует! Как мы видим, раскраска доски не только позволяет шахматисту легче ориентироваться во время игры, но и служит средством решения математических задач.

В рассмотренной задаче существенным было не то, что из доски вырезаны угловые поля, а то, что они одного цвета. Ясно, что какую пару одноцветных полей ни вырезать, покрыть домино оставшуюся часть доски не удастся. Таким образом, возникает следующая задача.

*Пусть теперь на шахматной доске вырезаны два поля разного цвета. Всегда ли можно покрыть оставшуюся часть доски 31 домино?*

Оказывается, что всегда. Эффективное доказательство нашел известный американский математик Р. Гомори. Проведем на шахматной доске границы между вертика-

<sup>12</sup> Именно такое решение дано в книге Т. Саати «Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы» (М., «Мир», 1973).

лями и горизонталями так, как показано на рис. 3. В лабиринте между этими границами черные и белые поля следуют друг за другом, чередуясь, как пуговицы двух цветов на замкнутой нити (путь, по которому можно обойти этот лабиринт, является замкнутым). Какие бы два поля разного цвета мы ни вырезали из доски, нить разорвется: в одном месте, если вырезанные поля находятся рядом, и в двух местах — в противном случае. При этом каждый кусок нити будет состоять из четного числа полей. Следовательно, эти куски, а значит — и всю доску, покрыть домино можно!

Любопытные идеи, связанные с пуговицами и нитями, мы еще встретим в главе 11.

Предположим, что из шахматной доски вырезаны некоторые поля так, что на оставшуюся ее часть нельзя

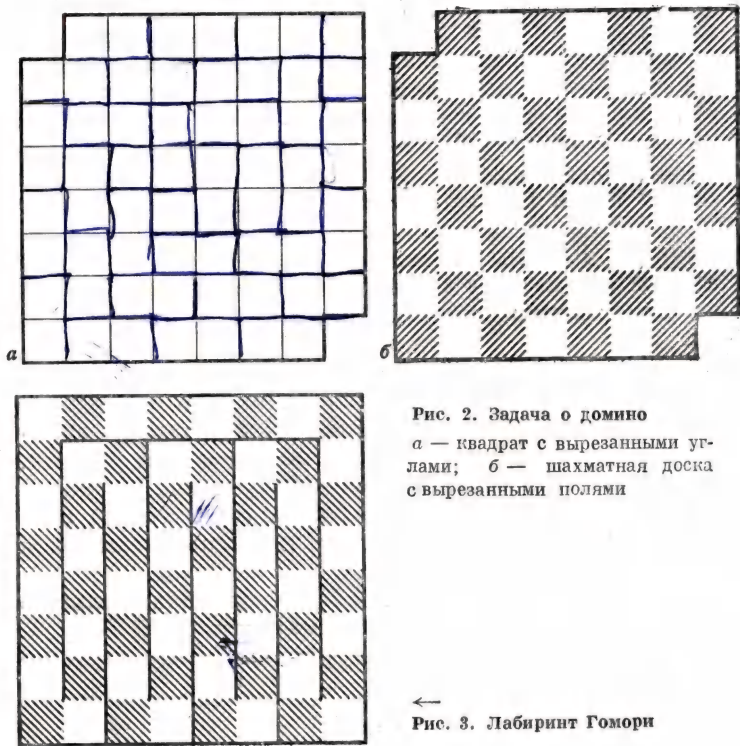


Рис. 2. Задача о домино

а — квадрат с вырезанными углами; б — шахматная доска с вырезанными полями

←

Рис. 3. Лабиринт Гомори

поместить ни одного домино. Нетрудно проверить, что наименьшее число вырезанных полей, обладающих таким свойством, равно 32 — это все поля одного цвета (белые или черные).

Задачи о шахматной доске и домино составляют лишь небольшую часть огромной серии задач такого сорта. Американский математик С. Голомб создал целую науку, которую назвал *полимино*, а его книга, посвященная этой теме, переведена во многих странах мира, в том числе у нас <sup>13</sup>. В общем случае полимино представляет собой односвязную фигуру, состоящую из квадратов. С точки зрения шахматиста односвязность означает, что все квадраты полимино можно обойти ходом ладьи. В зависимости от числа квадратов, полимино бывают различного типа. Мономино содержит один квадрат, домино — два, тримино — три, тетрамино — четыре, пентамино — пять, гептамино — шесть квадратов и т. д. В задачах о полимино покрываются разнообразные доски, не обязательно прямоугольные. Мы остановимся еще на нескольких вопросах, связанных с обычной шахматной доской. Очевидно, покрыть доску только прямыми тримино, т. е. домино  $3 \times 1$ , невозможно, так как 64 не делится на 3. Возникает следующая задача.

*Можно ли покрыть шахматную доску 21 прямым тримино и одним мономино? Если это возможно, то какие поля может занимать мономино?*

Одно из необходимых покрытий дано на рис. 4, а. Для определения возможных расположений мономино проведем на доске две системы параллельных прямых, как показано на рис. 4, б.

Легко убедиться, что при любом покрытии каждое тримино покрывает ровно одно поле, через которое проходит сплошная линия, и ровно одно, через которое проходит пунктирная линия. Поскольку число полей, пересекаемых сплошными прямыми, равно 22, так же как и число полей, пересекаемых пунктирными прямыми, а тримино имеется 21, то мономино может покрывать лишь поля, пересекаемые обоими семействами прямых. А таких полей — всего четыре: с3, с6, f3 и f6! Поворачивая доску на 90, 180 и 270°, можно получить соответствующие покрытия для каждого из этих четырех полей.

<sup>13</sup> С. Голомб. Полимино. М., «Мир», 1974.



Следующая задача несколько отличается от рассмотренных выше.

*Можно ли шахматную доску покрыть домино так, чтобы на ней нельзя было провести ни одной границы между вертикалями и горизонталями, не пересекая домино?*

Если представить себе, что доска — это стенка, а домино — кирпичи, то существование указанной границы (шва) свидетельствует о непрочной кладке. Иначе говоря, в задаче спрашивается, можно ли расположить «кирпичи» так, чтобы «стенка» не рухнула. Прямоугольник, который удастся покрыть необходимым образом, называется «прочным». В «прочности» шахматной доски можно убедиться на рис. 5. В общем случае Гарднер показывает, что из домино можно сложить «прочный» прямоугольник, если его

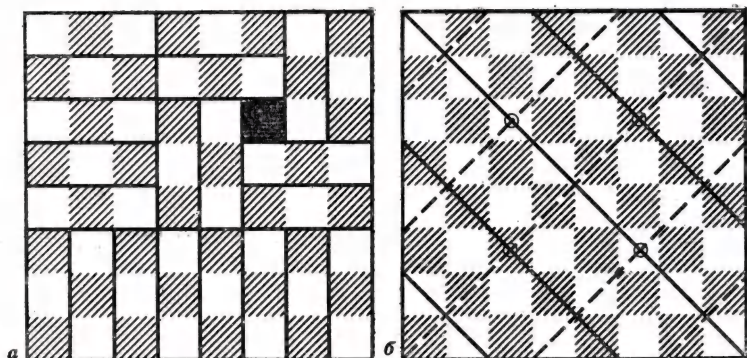
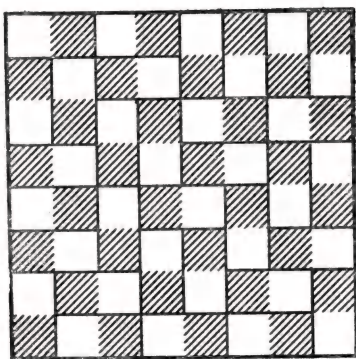


Рис. 4. Задача о тримино

а — на доске 21 тримино;

б — нахождение непокрытых полей



←

Рис. 5. «Прочная» шахматная доска

площадь четна, а длина и ширина больше четырех, при этом исключение составляет лишь квадрат  $6 \times 6$ .

Ниже мы будем часто иметь дело с прямоугольными шахматными досками того или иного размера. При этом всегда считается, что доска  $m \times n$  имеет  $m$  вертикалей и  $n$  горизонталей (шахматных). Мы говорим, что доска «четна», если число ее полей четно, и «нечетна» — в противном случае. Всюду, где размеры доски не указаны, имеется в виду стандартная шахматная доска, для которой  $m = n = 8$ .

*Доска  $100 \times 4$  покрыта домино. Доказать, что ее можно распилить по одной из границ между вертикалями и горизонталями, не затрагивая ни одного домино.*

Любая из указанных границ делит доску на две части, состоящие из четного числа полей. Поля каждой части разобьем на два класса: покрытые домино, целиком лежащими в этой части, и покрытые домино, пересекаемыми границей. Так как число полей каждой части четно (быть может, нуль), равно как и число полей первого класса (каждое домино покрывает два поля), то и число полей второго класса четно. А это и значит, что число домино, пересекаемых границей, четно. Всего разделяющих границ существует 102 (99 вертикальных и 3 горизонтальных), и если каждая из них пересекает домино, то в покрытии участвует не менее  $102 \times 2 = 204$  домино. В нашем же распоряжении их только 200! Фактически мы показали, что прямоугольник  $100 \times 4$  является «непрочным».

Вопрос о возможности покрытия произвольной прямоугольной доски линейными  $k$ -мино (домино  $k \times 1$ ) решается следующей теоремой<sup>14</sup>.

*Доску  $m \times n$  можно покрыть линейными  $k$ -мино в том и только в том случае, если хотя бы одно из чисел  $m$  или  $n$  делится без остатка на  $k$ .*

Проиллюстрируем теорему на следующем примере.

*Можно ли покрыть доску  $10 \times 10$  (на такой доске играют в стоклеточные шашки) прямыми тетрамино?*

Прямое тетрамино имеет размеры  $4 \times 1$ , и, значит, в принципе 25 костей могли бы покрыть все поля нашей доски. Однако из теоремы следует, что это невозможно — 10 не делится на 4.

<sup>14</sup> Она доказана А. Сойфером в статье «Клетчатые доски и полимино» («Квант», 1972, № 11); там же приведен ряд новых задач о полимино.

Рассмотрим еще несколько задач о шахматной доске. В решении следующей задачи вновь используется ее раскраска.

*Пусть доска состоит из нечетного числа полей. На каждом ее поле поставим какую-нибудь шахматную фигуру. Можно ли сдвинуть все эти фигуры на соседние поля (по вертикали или горизонтали), чтобы при этом никакие две из них не попали на одно поле?*

Задание невыполнимо. Действительно, если бы указанное смещение фигур существовало, то каждая «белая» фигура (стоящая на белом поле) стала бы «черной» (попала на черное поле), а каждая «черная» — «белой».

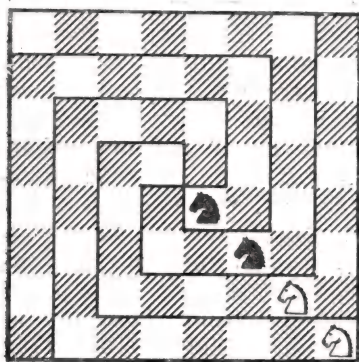


Рис. 6. Задача Лойда о четырех конях

Таким образом, доска состояла бы из одинакового числа белых и черных полей, а это противоречит ее «нечетности».

Популярными являются задачи о разрезании шахматной доски. Самой известной из них является следующая, принадлежащая С. Лойду.

*На полях a1, b2, c3, d4 стоят четыре коня. Разрезать доску на четыре конгруэнтные части (совпадающие при наложении) так, чтобы на каждой из них оказалось по коню.*

В задачах на разрезание всегда предполагается, что разрезы производятся только по границам между вертикалями и горизонталями доски. Решение данной задачи показано на рис. 6. Со времен Лойда появилось много новых и более трудных задач на эту тему. В частности, решались задачи о разрезании доски на четыре конгруэнтные части при различных расположениях коней (кони,



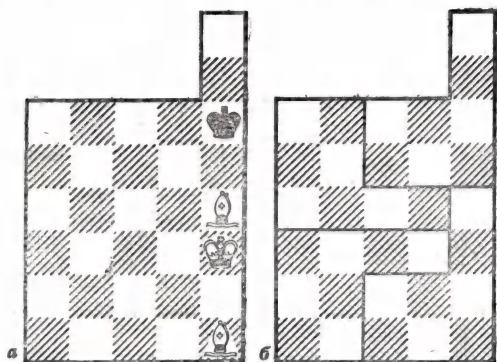
конечно, играют здесь лишь символическую роль). В этом вопросе имеется еще много нерешенных проблем. Например, до сих пор не известно число способов, которыми можно разрезать обычную доску (без фигур) на две конгруэнтные части.

*Пусть после нескольких разрезов доски образовавшиеся части разрешается перекладывать так, чтобы следующий разрез мог рассечь не одну, а сразу несколько частей. Сколько разрезов потребуется для получения 64 отдельных полей доски (квадратов  $1 \times 1$ )?*

Сначала разрежем доску пополам, затем обе половины положим рядом и разрежем доску на четыре одинаковые

Рис. 7. Три задачи на обычной доске

а — шахматные задачи;  
б — математическая задача



части и т. д. Всего понадобится 6 разрезов ( $2^6 = 64$ ) и меньшим числом не обойтись.

*Пусть теперь части доски разрешается резать только отдельно. Сколько разрезов понадобится для получения 64 полей в этом случае?*

Как правило, эта задача (особенно, если она предлагается после предыдущей) вызывает определенные трудности. Видимо, это связано с некоторой инерционностью нашего мышления. Ведь сразу видно, что понадобится 63 разреза! Действительно, каждый разрез увеличивает число частей на единицу; при этом в начальный момент мы имеем одну часть (саму доску), а в конечный — 64 (все поля доски).

*В задаче на рис. 7, а требуется выполнить три задания, причем одно математическое и два чисто шахматных:*

а) разрезать доску на четыре конгруэнтные части;

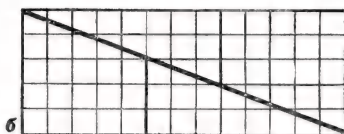
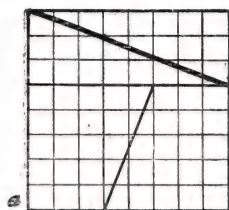


Рис. 8. Парадокс с разрезанием шахматной доски

а)  $8 \times 8 = 64$ ;

б)  $13 \times 5 = 65$

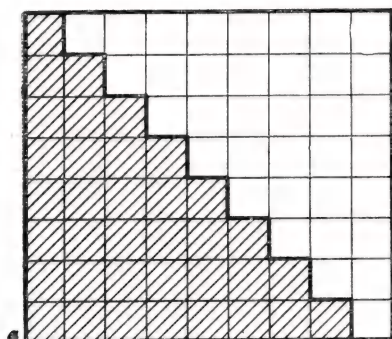
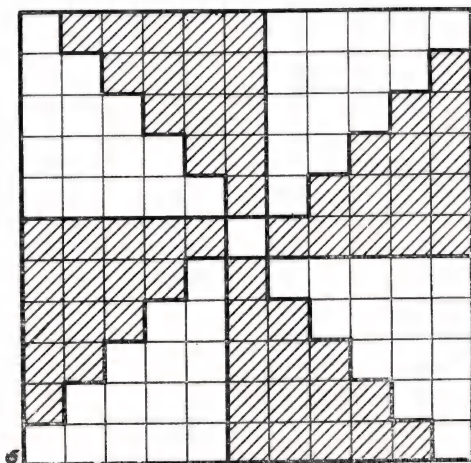


Рис. 9. Вывод формул методом шахматной доски:

а)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ;

б)  $8(1 + 2 + \dots + n) + 1 = (2n+1)^2$



б) заматовать черного короля кратчайшим путем при ходе белых;

в) заматовать черного короля кратчайшим путем при ходе черных (черные играют кооперативно).

Решения: а) как нужно разрезать доску, показано на рис. 7, б; б) при ходе белых мат дается на 12-м ходу: 1—12. Се1—b4, Крe3—d3—c4, Се4—c2—b3, Крe4—c3, Сb4—d6, Сb3—d5, Крc3—c2, Cd6—c5, Cd5—c4, Cd6—b4 мат (все ходы черного короля вынуждены и не приводят-ся); в) при правильной игре после 1... Крe6—e7 мат невозможен, так как черный король скрывается на e8—2. Се1—b4+ Крe7—e8, и чернополюный слон вынужден уйти с диагонали a3—e7 ввиду угрозы пата. Однако если черные играют кооперативно (помогают белым дать мат), то цель достигается всего через три хода: 1 ...Крe6—d6 2. Крe3—d4 Крe6—e7 3. Се1—b4+ Крe7—e6 4. Се4—d5 мат. Ряд полей нашей доски при матовании не используется, но при их исключении не было бы задачи на разрезание доски.

Рассмотрим теперь один известный парадокс, связанный с разрезанием шахматной доски. Разрежем доску на четыре части, как показано на рис. 8, а (в данном случае нам невыгодно раскрашивать ее поля), и из образовавшихся частей сложим прямоугольник (рис. 8, б). Площадь доски равна 64, а площадь полученного прямоугольника равна 65. Таким образом, при разрезании доски откуда-то взялось одно лишнее поле!

Разгадка парадокса состоит в том, что наши чертежи выполнены не совсем точно (мы умышленно провели толстые линии, чтобы скрыть неточности). При аккуратном построении чертежа на рис. 8, б вместо диагонали прямоугольника появится ромбовидная, чуть вытянутая фигура со сторонами, которые кажутся почти слившимися. Площадь этой фигуры как раз будет равна «лишней» единице.

Известный популяризатор математики начала века Е. Игнатьев придумал «метод шахматной доски», позволяющий выводить различные формулы<sup>15</sup>. Приведем два несложных примера на эту тему.

Найдем сумму  $n$  первых натуральных чисел «методом шахматной доски». Для этого на доске  $(n + 1) \times n$

<sup>15</sup> Е. Игнатьев. В царстве смекалки, или арифметика для всех. Кн. 1—3. М.— Пг., Госиздат, 1923.



(на рис. 9, а  $n = 8$ ) окрасим в черный цвет все поля первой вертикали, все поля второй вертикали (кроме верхнего), третьей вертикали (кроме двух верхних) и т. д., наконец — нижнее поле  $n$ -й вертикали. В результате белых и черных полей на нашей доске будет поровну, а именно  $1 + 2 + \dots + n$ . Поскольку вся доска состоит из  $n(n + 1)$  полей, получаем

$$2(1 + 2 + \dots + n) = n(n + 1),$$

откуда вытекает известная формула для суммы арифметической прогрессии:

$$1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2.$$

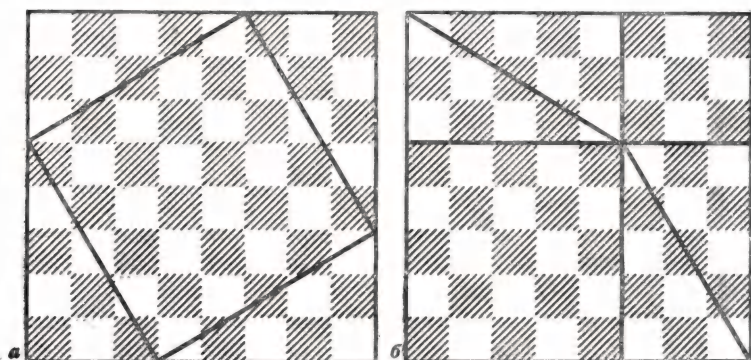


Рис. 10. Теорема Пифагора на шахматной доске

а — квадрат и четыре треугольника; б — два квадрата и четыре треугольника

Теперь докажем такую формулу:

$$8(1 + 2 + \dots + n) + 1 = (2n + 1)^2.$$

Для этого возьмем доску  $(2n + 1) \times (2n + 1)$  и закрасим ряд ее полей черным цветом так, как показано на рис. 9, б (для случая  $n = 5$ ). Очевидно, каждая черная часть содержит  $(1 + 2 + \dots + n)$  полей. Без учета центрального поля мы имеем здесь четыре одинаковые белые и черные части. Необходимая формула следует из того, что наша доска содержит  $(2n + 1)^2$  полей и состоит из центрального поля и восьми одинаковых частей (четырех белых и четырех черных — рис. 9, б).

При разгадке парадокса, а также знакомстве с «методом шахматной доски» саму доску можно благополучно заменить листом клетчатой бумаги или таблицей. Существует огромное множество задач с такими объектами, однако их подробное рассмотрение слишком далеко увело бы нас от шахмат.

В заключение главы приведем одно старинное доказательство на шахматной доске... теоремы Пифагора. Нарисуем на доске квадрат, как показано на рис. 10, а. Доска разбивается на этот квадрат и четыре конгруэнтных прямоугольных треугольника. На рис. 10, б мы видим те же четыре треугольника, а также два квадрата. Итак, треугольники в обоих случаях занимают одну и ту же площадь. Следовательно, одну и ту же площадь занимают и оставшиеся части доски без треугольников, на рис. 10, а — одного квадрата, а на рис. 10, б — двух. Поскольку большой квадрат построен на гипотенузе прямоугольного треугольника, а маленькие — на его катетах, то «пифагоровы штаны во все стороны равны»!

Разумеется, если говорить строго, наши рассуждения не доказывают теорему Пифагора (исследован лишь некоторый частный случай), а лишь иллюстрируют ее. Но такое доказательство проходит и без использования шахматной доски — для любого прямоугольного треугольника можно подобрать квадрат, который разбивается подобным образом.

### Глава 3

## ГЕОМЕТРИЯ ШАХМАТНОЙ ДОСКИ

Наиболее интересное свойство шахматной доски заключается в весьма необычном измерении расстояний на ней. Например, в обычной, евклидовой геометрии расстояние от поля  $a1$  до  $b8$  больше, чем до  $a8$  (имеются в виду центры полей), однако король оба пути может преодолеть ровно за семь ходов! Удобнее всего расстояние между полями шахматной доски определять как число ходов, за которое данная фигура попадает с одного из этих полей на другое. Разумеется, расстояние, введенное таким обра-

зом, зависит от конкретной фигуры. При этом для всех фигур, кроме пешки и рокирующего короля, расстояние от поля а до поля в равно расстоянию от в до а, а расстояние от а до с не больше, чем сумма расстояний от а до в и от в до с (так называемое неравенство треугольника).

Свойства наших «расстояний» не во всем похожи на обычные. На плоскости две точки соединяет лишь один кратчайший путь, а на шахматной доске король, например, может перейти с f7 на a7 за пять ходов 46 различными способами — и, значит, здесь у нас 46 «отрезков», соединяющих эти поля.

Эффектную иллюстрацию указанного свойства представляет собой известный этюд Р. Рети (рис. 11). Кажется

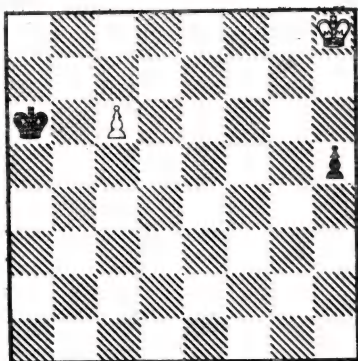


Рис. 11. Р. Рети. Белые начинают и делают ничью.

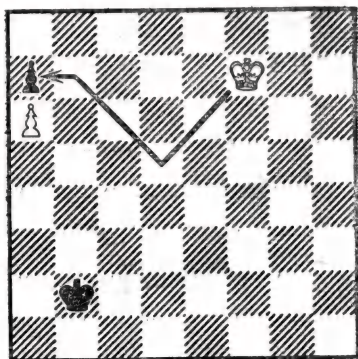


Рис. 12. И. Майзелис. Белые начинают и выигрывают

совершенно невероятным, что в этом положении белый король в состоянии справиться с черной пешкой. Однако это становится возможным, если он отправится за ней не по обычной прямой, а по «королевской».

1. Kph8—g7 h5—h4 2. Kpg7—f6! Теперь грозит 3. Кре6, после чего белая пешка при поддержке короля проходит в ферзи одновременно с неприятельской. Такая угроза не могла бы возникнуть, если бы белый король двигался за пешкой h прямолинейно.

2... Кра6—b6 3. Kpf6—e5! Снова король хочет помочь своей пешке, и хотя он довольно далеко удалился от вертикали h, после вынужденного 3. ...Крb6:c6 он



догоняет неприятельскую пешку как раз на пороге ее превращения: 4. Крe5—f4 h4—h3 5. Кpf4—g3 h3—h2 6. Кpg3:h2. Ничья!

Итак, движение короля по прямой в случае необходимости можно заменить движением по ломаной линии. В этюде И. Майзелиса (рис. 12) пешка на a7 беззащитна, и единственный шанс черных заключается в том, чтобы на неизбежное взятие Кр : a7 ответить Крс7, не выпуская короля противника из заточения. Путь белого короля до пешки a7 занимает пять ходов, причем существует 30 способов съесть эту пешку за столько ходов (на 16 меньше, чем число путей с f7 на a7, так как движение через b6 запрещено). Но лишь один из 30 путей приводит к цели (рис. 12):

1. Кpf7—e6! Крb2—c3 2. Крe6—d5!! Белый король, как говорят шахматисты, «отталкивает плечом» своего черного оппонента. Теперь тот не может пойти на d4, и это оказывается для него губительным. Не проходит, например, 1. Крe6 Крс3 2. Кpd6 Кpd4 3. Крс6 Крс5! 4. Крb7 Крд6 5. Кр:a7 Крс7 с ничьей.

После анализа этюдов нам теперь будет легко разобраться в следующем практическом окончании (рис. 13) случившемся в одном из чемпионатов Москвы между двумя мастерами. Вот как закончилась партия: 1. Крс8—c7 Крс3—d3 2. Крс7—b6 Крд3—c3 3. Крb6—b5 a4—a3 4. Крb5—a4 Крс3—b2 5. Кра4—b4 Крb2:a2. Белые сдались.

Покажем, что наши мастера были плохо знакомы с геометрией шахматной доски. Взять черную пешку белые все равно не могли, и поэтому их шанс заключался лишь в том, чтобы на неизбежное взятие Кр : a2 ответить Крс2, запирая черного короля (сравните с предыдущим этюдом). Итак, с самого начала у белых мог быть только один план: стремиться королем в обход и чем раньше, тем лучше, т. е. надо было играть 1. Крд7! После ошибочного 1. Крс7 черный король направился к пешке a2, но при этом ему следовало «оттолкнуть плечом» белого короля: 1...Крд4, а не 1... Крд3, как было в партии. После 1... Крд3 белые снова могли поправить свои дела, отправившись в сбход 2. Крд6!, но никак не 2. Крb6? Таким образом, противники сделали подряд три ошибки: сначала белые не нашли ничьей, затем черные не воспользовались этим, и, наконец, белые снова выпустили ничью.

На рис. 13 показан прямоугольный зигзаг, по которому должен был пройти белый король, прежде чем с c8 попасть

на с2 (причем за те же шесть ходов, что и при движении по прямой). Каждый ход короля обозначен на рисунке отрезком, соединяющим центры соответствующих полей. При этом путь короля изображается ломаной линией. В дальнейшем мы часто будем пользоваться графическим изображением перемещений по доске шахматных фигур. Подобные графики, как мы увидим, часто имеют весьма любопытную форму.

Конечно, за доской шахматиста никто не заставляет решать математические задачи — чтобы хорошо играть в шахматы, совсем не обязательно быть математиком. Беспрерывный расчет вариантов, который приходится

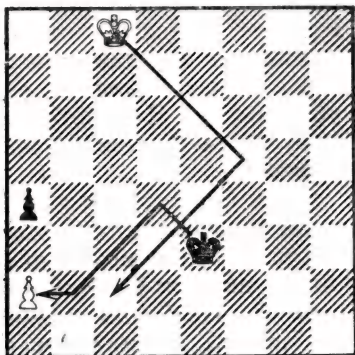


Рис. 13. Пешечный эндшпиль

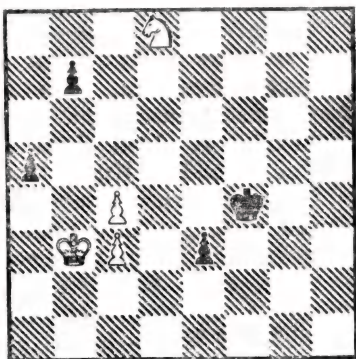


Рис. 14. Д. Бронштейн — М. Ботвинник (шестая партия матча на первенство мира, 1951 г.)

ему вести во время партии, имеет совершенно иную специфику, чем аналогичная работа математика. И все же математический навык, как мы убедились, иногда оказывается полезным. Приведем еще один случай из практики, в котором один из партнеров упустил из виду упомянутое свойство доски, и это привело к драматической развязке.

Позиция на рис. 14 возникла после 56-го хода черных в шестой партии матча на первенство мира М. Ботвинник — Д. Бронштейн. Здесь Бронштейн, игравший белыми, легко делал ничью путем 57. Ke6+ и 58. Kd4, однако он решил сначала подтянуть короля к опасной проходной пешке и пошел 57. Krb3—с2. Разумеется, гросс-

мейстер хорошо видел возможность появления черного короля на поле f2, но рассматривал лишь естественный маршрут Kpf4—f3—f2, полагая, что и здесь успеет сыграть Ke6 и Kd4+ с ничьей. Каково же было изумление белых, когда король Ботвинника действительно отправился к полю f2, но не по прямому пути, а по обходному. После 57 ...Kpf4—g3!! белым пришлось сдаться, так как оказалось, что пешку e3 остановить невозможно: на 58. Ke6 теперь следует 59. ...e2, и белый конь попадает на d4 без шаха.

Итак, от одного поля доски до другого король может пройти многими кратчайшими путями. Выясним, например, сколькими различными способами он может добраться с e1 до d8, двигаясь кратчайшим путем (т. е. за семь ходов). Очевидно, он может идти к цели самыми причудливыми зигзагообразными маршрутами, лишь бы на каждом ходу переходить с одной горизонтали на следующую и находиться в рамках прямоугольника e1—a5—d8—h4.

Для подсчета искомого числа путей составим таблицу чисел, которые будем помещать прямо на полях доски. Число, стоящее на данном поле, равно числу кратчайших путей до него с поля e1. На поля d2, e2 и f2 король может попасть кратчайшим путем (в один ход) единственным способом, и поэтому на них ставятся единицы. По той же причине единицы попадают на поля c3 и g3. На d3 за два хода король попадает двумя способами (с полей d2 и e2,  $1 + 1 = 2$ ), а на e3 — тремя (с полей d2, e2 и f2,  $1 + 1 + 1 = 3$ ). В общем случае число кратчайших путей до данного поля складывается из одного, двух или трех чисел, стоящих на полях предыдущей горизонтали (с которых за один ход король попадает на данное поле). Пользуясь этой простой закономерностью, мы заполним всю таблицу и получим, что с поля e1 до поля d8 король может добраться кратчайшим путем 357 способами.

Аналогичным образом, заполняя соответствующую таблицу, можно находить число кратчайших путей между различными полями и для любых фигур. При этом доска может иметь произвольную форму и даже содержать заштрихованные поля.

Заметим, что заполняемая нами таблица представляет собой фрагмент так называемого 3-арифметического треугольника с границами. Это название связано с тем, что наша таблица имеет вид треугольника, обрезанного кра-



ями доски, а каждый элемент таблицы является суммой не более чем трех элементов, стоящих в таблице под данным. Существуют несложные формулы для вычисления всех элементов такого треугольника. Они позволяют выражать число кратчайших путей между двумя данными полями через их координаты. Разумеется, если использовать такую формулу для нашей задачи о движении короля с e1 до d8, мы также получим число 357. Пользуясь комбинаторным принципом включения и исключения<sup>16</sup>, можно найти формулы и для более сложных случаев. Подробнее на таких задачах мы не станем останавливаться, большое число их содержится у Окунева, Фабеля и Крайчика.

Как мы видели, шахматная геометрия отличается от обычной, евклидовой геометрии, которую изучают в школе. Однако в шахматной композиции известны задачи, в которых существенную роль играет именно евклидово расстояние. Такие задачи называются максимуммерами, и в них одна или обе стороны (чаще одни черные) должны обязательно делать максимальные по длине ходы. Длина хода фактически равна евклидовой длине отрезка, соединяющего центры соответствующих полей. Так, например, длина хода Лс1—с4 или Фс1—с4 равна трем, а длина хода Сf1—с4 или Фf1—с4 определяется по теореме Пифагора и равна  $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ . Из этого следует, что ход ферзем с a1 до f6 длиннее, чем до a8 ( $5\sqrt{2} \approx 7,05 > 7$ ). Длина хода короля равна 1 или  $\sqrt{2}$ , длина короткой рокировки равна 4 (т. е.  $2 + 2$ ), а длинной — 5 (т. е.  $2 + 3$ ).

В максимуммерах обычно требуется дать кооперативный мат (белые стремятся заматовать себя, а черные им помогают) или обратный мат (черные не желают давать мат белому королю, а белые их заставляют). А следующую задачу можно назвать «минимуммером».

*Придумать такую шахматную партию, которая заканчивается матом и имеет минимальную сумму длин всех ходов.*

<sup>16</sup> Об этом принципе рассказывается в книге Н. Виленкина «Популярная комбинаторика» (М., «Наука», 1975). В этой книге можно найти много интересных комбинаторных задач на шахматной доске. В ней же рассказывается о так называемом треугольнике Паскаля и его различных обобщениях, одно из которых представляет собой 3-арифметический треугольник.

Как известно, партия может закончиться матом уже на втором ходу: 1. f2—f3 e7—e6 2. g2—g4 Фd8—h4 мат (белые могут объявить аналогичный мат только на третьем ходу). Здесь сумма длин всех сделанных ходов равна  $4 + 4\sqrt{2} \approx 9,66$ . Эта партия является кратчайшей в шахматном смысле, но не в геометрическом. Искомой же партией является такая: 1. d2—d3 e7—e6 2. Фd1—d2 Кре8—e7 3. Фd2—e3 e6—e5 4. Фе3:e5 мат. Сумма длин всех ходов этой партии равна  $7 + \sqrt{2} \approx 8,41 < 9,66$ .

Второй и третий ходы черных можно поменять местами, и в результате мы получаем две партии, заканчивающиеся матом и имеющие минимальную сумму длин ходов.

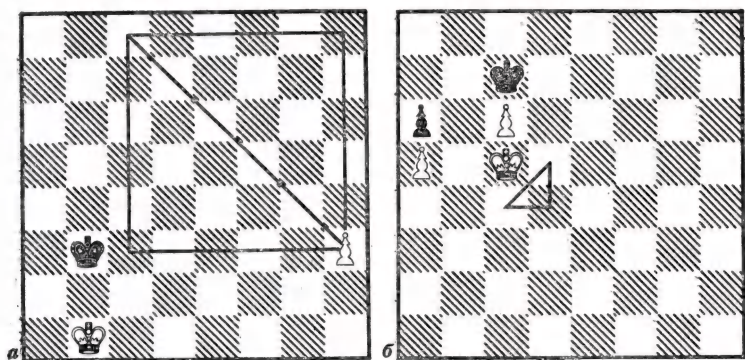


Рис. 15. Геометрия шахматной доски

а — правило квадрата; б — правило треугольника

Раз уж мы затронули математические стороны самой игры, остановимся еще на некоторых геометрических идеях, возникающих на шахматной доске. Заметим попутно, что математики уже давно отчаялись создать строгую математическую теорию шахмат и ограничиваются лишь частными вопросами. Впрочем, исследование многих шахматных позиций носит вполне математический характер. Все дальнейшие примеры относятся к теории пешечных окончаний.

В позиции на рис. 15, а белый король не принимает участия в игре, и все зависит от того, успеет ли его черный оппонент догнать пешку h3. Неопытные шахматисты обычно рассуждают так: пешка идет сюда, король — туда,

пешка — сюда, король —туда, и т. д. При этом они часто путаются (особенно, когда на доске есть еще какие-нибудь пешки) и дело кончается просчетом. Однако исход игры легко оценить при помощи «правила квадрата». Достаточно выяснить, может ли король при своем ходе вступить в «квадрат» пешки, в данном случае изображенном на рис. 15, а. Для удобства можно мысленно провести всего одну линию — диагональ квадрата (h3—c8). Итак, в данной позиции черные при своем ходе делают ничью (попадают в квадрат), а при ходе противника проигрывают.

Рассмотрим теперь позицию на рис. 15, б. Здесь черные при своем ходе сразу проигрывают, так как белый

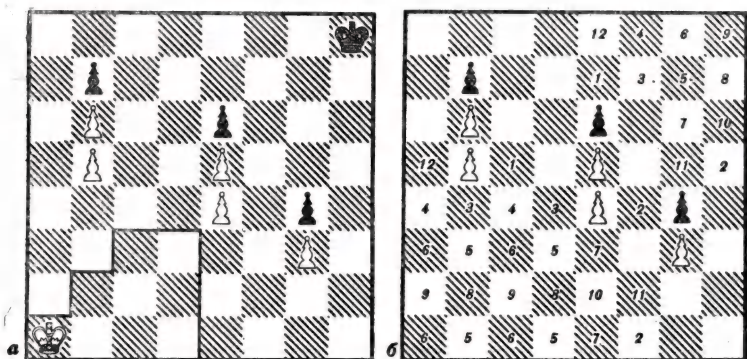


Рис. 16. Р. Бианкетти. Белые начинают и выигрывают:

а — этюд; б — таблица соответствия полей

король идет на b6 и берет пешку а6. Но как белым передать очередь хода противнику или, пользуясь шахматным языком, выиграть темп? После 1. Kpd5 Kрс8 ничего не дает 2. Kpd6 Kpd8 3. c7+ Kрс8 4. Kрс6 — пат!, а 2. Kрс5 Kрс7 приводит к исходной позиции. Выигрыш темпа достигается при помощи так называемого «правила треугольника». Для данного примера этот треугольник (c4—d4—d5) изображен на рис. 15, б. После 1. Kрс5—d5 Kрс7—c8 2. Kpd5—d4 Kрс8—b8 3. Kpd4—c4! Kpb8—c8 4. Kрс4—d5 белые достигают своей цели, так как на 4... Kpd8 теперь выигрывает 5. Kpd6, а на 4. ...Kрс7—5. Kрс5.

Обратимся теперь к более сложной позиции на рис. 16, а.



Хотя у белых здесь две лишние пешки, выиграть чрезвычайно трудно. Для анализа подобных позиций с блокированной пешечной структурой применяются различные методы: «критические расстояния Бианкетти», «координатная система Эберса» и др. Теория таких окончаний носит название *теории соответственных полей*. Исследование каждой конкретной позиции можно рассматривать как решение тонкой математической задачи<sup>17</sup>, однако общей математической теории пока создать не удалось. Здесь мы не в состоянии остановиться на всех деталях теории соответственных полей<sup>18</sup>, ограничимся исследованием позиции на рис. 16, а, отмечая результаты анализа на рис. 16, б.

Белые намерены прорваться либо через поле d6, либо через поле f4, и черный король должен воспрепятствовать обоим планам. Таким образом, если белый король попадет на c5, черный должен встретить его на e7 (при короле на d7 черные не успевают защитить пешку g4: Kpc5—d4—e3—f4). Другими словами, полю c5 соответствует поле e7. При положении белого короля на f4 черный должен успеть на h5, т. е. полю f4 соответствует поле h5.

Если белый король попал на d4, черный в этот момент должен занять поле f7, чтобы на Kpc5 ответить Kpe7, а на Kpe3 иметь ответ Kpg6. С поля c4 белые могут пойти как Kpc5, так и Kpd4, и король черных в этом случае должен располагаться на f8, чтобы встать на e7 (при Kpc5) или на f7 (при Kpd4). С поля d3 возможны ходы Kpc4, Kpd4, Kpe3, и поэтому полю d3 соответствует поле g7.

Обходя последовательно все наиболее важные поля, имеющиеся в распоряжении белого короля, и подыскивая поля соответствия для его черного коллеги, получаем рис. 16, б, на котором соответственные поля обозначены одним и тем же номером. Найденное соответствие не является взаимно однозначным, что и видно на рисунке. Например, полям b4 и d4 для белого короля соответствует одно и то же поле f7 для черного.

<sup>17</sup> Так, в статье Б. Митягина и др. «Решение одной игры на графах» («Проблемы математического анализа сложных систем», вып. 1. Воронеж, 1967) для исследования пешечного окончания используется аппарат теории графов.

<sup>18</sup> Подробнее с этой теорией можно ознакомиться в кн.: «Шахматные окончания», т. 1. Под ред. Ю. Авербаха. М., «Физкультура и спорт», 1956.

Теперь решение шахматной позиции находится почти автоматически. Следует руководствоваться лишь единственным правилом: ставить белого короля на такое поле, которому в данный момент соответствует поле нахождения черного короля, или на такое поле, соответствующее которому недоступно черному королю за один ход. Так как полю b1 соответствует поле g7, полю b2 — h7, а полю a2 — h8, то решает только 1. Кра1—a2!! После 1. Крb1? Кpg7! или 1.Крb2? Кph7! черные добиваются ничьей.

Поскольку дальнейший ход игры проще, приведем лишь основной вариант (если черные играют иначе, они проигрывают еще быстрее). 1. Кра1—a2!! Кph8—h7 2. Кра2—b2! Кph7—g7 3. Крb2—b3! Кpg7—g8 4. Крb3—c3! Кpg8—f8 5. Крс3—c4! Кpf8—f7 6. Крс4—d4! По лестнице, изображенной на рис. 16, а, белый король совершил восхождение на самую верхнюю ступеньку, и черные беззащитны! Очевидно, с помощью таблицы на рис. 16, б легко оценить нашу позицию и при других начальных расположениях королей, но только при данной пешечной конфигурации.

Заканчивая эту главу о математических элементах шахматной игры, приведем один пример «изобразительной» задачи. В изобразительном (символическом) жанре шахматной композиции начальное расположение фигур или траектория их движения в процессе решения символически изображает некоторый рисунок (букву, цифру, предмет) или замысловатую геометрическую фигуру.

Рассмотрим следующую задачу И. Клинга. Белые: Крb5, Фh7, пп. b6, e6; черные: Кра8, Фb8, Кg8, пп. a2, e7. Белые начинают и дают мат в 14 ходов.

Решение состоит из 14 ходов ферзя: Фе4+, Фа4+, Фf4+, Фf8+, Фf3+, Фа3+, Фg3+, Ф : g8+, Фg2+, Ф : a2+, Фh2+, Фh8+, Фа1+, Фа6 мат (все ходы черных вынуждены). Если нарисовать путь, который проходит ферзь в процессе решения, можно обнаружить, что он имеет довольно забавный вид. Заметим, что такие сложные возвратно-поступательные движения ферзя (на достаточно широких просторах доски) шахматные композиторы называют виражом.

## КОНЬ-ХАМЕЛЕОН

Совсем не обязательно быть шахматистом, чтобы знать, какая шахматная фигура самая удивительная. Конечно, это — конь! Не случайно, выражение «ход конем» стало крылатым и прочно вошло в наш быт. А один из самых остроумных гроссмейстеров, С. Тартаковер, прямо считал, что «вся шахматная партия — это один замаскированный ход конем». Поэтому, переходя к математическим задачам о фигурах на шахматной доске, мы прежде всего остановимся на таких задачах, в которых участвует конь.

Основное отличительное свойство коня состоит в том, что он на каждом ходу меняет цвет своего поля. Вот почему в заголовке этой главы мы назвали его хамелеоном. Многие задачи о коне удается эффектно решить, если воспользоваться этим важным свойством коня.

Рассмотрим два примера на эту тему.

*На всех полях доски с нечетным числом полей стоят кони. Могут ли все они за один ход переместиться так, чтобы на каждом поле по-прежнему стоял один конь?*

Доказательство того, что это невозможно, опирается на «нечетность» доски и свойство коня-хамелеона: оно аналогично данному на стр. 26 для задачи о сдвиге фигур на доске.

*Может ли конь с a1 добраться до h8, ступив на каждое поле доски ровно один раз?*

И это невозможно. Исходное поле a1 — черное, и, значит, на каждом нечетном ходу конь попадает на белое поле. Однако число 63 (именно на этом ходу конь прибывает на h8) нечетно, а поле h8 — черное.

Наша вторая задача оказалась довольно простой, но любопытно, что за доской шахматист иногда сталкивается с подобными вопросами. Рассмотрим, например, такую позицию: у белых лишь один король, стоящий на d2; у черных король на a1, конь на h8 и пешка на a2. Белым здесь удастся добиться ничьей, но только путем 1. Kpd2—c1! Теперь их король будет переходить с c1 на c2 и обратно, занимая каждый раз поле того же цвета, что и конь, и не выпуская черного короля из заточения. В случае 1. Kрс2 конь попадал на d3 при белом короле на c2, после чего черный король покидал угол, а пешка прохо-



дила в ферзи. Аналогия между этим чисто шахматным примером и предыдущей задачей очевидна.

Решим теперь один изящный этюд, в котором требуется перехитрить коня-хамелеона (рис. 17). Простой анализ позиции показывает, что фигуры обеих сторон в нижнем правом углу не могут двигаться, т. е., выражаясь шахматным языком, находятся во взаимном цугцванге. Например, если ферзь уйдет с h3, то либо будет потеряна ладья, либо двинется черный слон с угрозой f2—f1Ф. С другой стороны, любой ход слона f1 и коня h1 в начальном положении приводит к немедленной гибели черных — и, значит, они могут ходить только конем h8. Для выиг-

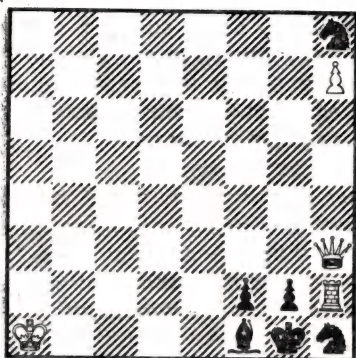


Рис. 17. В. Чеховер. Белые начинают и выигрывают

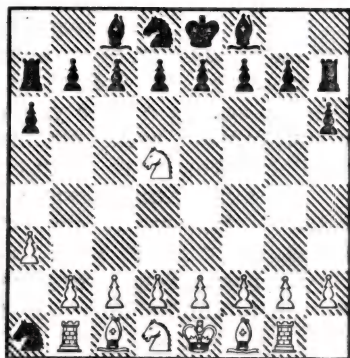


Рис. 18. В. Корольков. Мат в один ход

рыша белый король должен пройти к полю h8 и выиграть этого коня. Идти он может только по черным полям, так как на белом поле получит шах слоном f1 с превращением пешки f.

Прямолинейное движение короля на h8 не дает результата: 1. Kpb2 Kf7 2. Kpc3 Kh8 3. Kpd4 Kf7 (прикрывая поле e5) 4. Kpe3 Kh8 5. Kpf4 (ничего не дает 5. Фh4 Cd3 6. Л:h1 +, ибо черные играют не 6. ...ghФ? 7. Ф:f2 мат, а 6...ghK!) 5...Kf7! (охраняя оба поля — e5 и g5) 6. Kpe3 Kh8 7. Kpd4 Kf7 8. Kpc5 Kh8 9. Kpd6 Kg6! Итак, конь охраняет все поля вторжения белого короля. Для того чтобы все-таки «прорваться» к h8, нужно изменить соответствие цвета между белым королем и черным

конем. Но этого можно достичь, лишь встав королем один раз на белое поле. Искомым является поле a8 — единственное недоступное для черного слона!

После проведенного анализа решение находится почти автоматически: 1—6. Кра1—b2—c3—d4—c5—b6—a7 (черный конь в это время переходит с h8 на g6 и обратно) 7. Кра7—a8!! Kh8—g6 8. Кра8—b8 Kg6—h8 9. Kpb8—c7 Kh8—f7! Неожиданно черный конь опять создает барьер для короля, но это лишь временное препятствие. 10—13. Kpe7—b6—c5—d4—e5 Kh8—g6 + 14. Kpe5—f6 Kg6—h8 15. Kpf6—g7 Kh8—g6 16. h7—h8Ф (после 16. Kp:g6 Cd3 + вся работа белых пошла бы насмарку) 16... Kg6:h8 17. Kpg7:h8 Kh1—g3 18. Фh3:g3 Cf1—d3 19. Фg3:g2 мат. Любопытно, что в решении содержится также геометрический мотив: белый король, прежде чем добыться своего, побывал в трех углах шахматной доски!

Свойство коня-хамелеона играет важную роль в очень интересном жанре шахматной композиции, который называется *ретроградным анализом*. При решении ретроградной задачи приходится устанавливать, может ли данная позиция получиться из начального расположения фигур, а если может, то как. Для ответа на эти вопросы проводится ретроанализ позиции, иногда весьма сложный. Другими словами, для решения ретроградной задачи мы отправляемся в увлекательное «путешествие в прошлое».

Рассмотрим задачу на рис. 18. На первый взгляд, все чересчур просто — мат дается ходом 1. Kd5:c7. Но можно ли утверждать, что сейчас ход белых? А что, если в этой позиции ход черных — и тогда после 1...Ka1:c2 они дают мат? Для выяснения того, чей же здесь ход, произведем ретроанализ позиции.

Определим, какое число ходов, четное или нечетное, сделала каждая сторона прежде, чем возникла данная позиция. Легко убедиться, что королевская ладья, сколько бы ни ходила, с исходного поля h1 могла попасть на g1 только за нечетное число ходов. Положение ферзевой ладьи кажется более свободным — в ее распоряжении было три поля: a1, a2 и b1, но каждый раз она могла пойти только на соседнее: с a1 на a2 или b1, а с a2 и b1 лишь на a1. Так как сейчас она находится на b1, то ею сделано нечетное число ходов.

Белые слоны не двигались с места, так же как и их ферзь, который был взят конем черных. У короля были

лишь два соседних поля — d1 и e1, и ясно, что либо он совсем не двигался, либо сделал четное число ходов. Из всех белых пешек ходила только одна ладейная, да и та продвинулась всего на одно поле, т. е. на долю пешек приходится нечетное число ходов.

Как будто сложнее обстоит дело с подсчетом ходов, сделанных конями, так как неизвестно, где какой конь находится. Но оказывается, что это не играет никакой роли. Здесь-то и проявляется особенность коня-хамелеона. Если на d5 стоит ферзевый конь, то на это белое поле с белого же поля b1 он попал за четное число ходов. В этом случае на d1 расположился королевский конь, а поскольку оно белое, то с черного поля g1 он мог попасть на него только за нечетное число ходов. Таким образом, оба белых коня вместе сделали нечетное число ходов.

Но, может быть, результат изменится, если предположить, что на d5 находится королевский конь, а на d1 — ферзевый? Конечно, нет! Если это так, то королевский конь сделал нечетное число ходов (с черного поля попал на белое), а ферзевый — четное (с белого поля на белое), и сумма их ходов вновь нечетна. Вот как эффектно использовано свойство коня-хамелеона!

Суммируя все ходы, сделанные белыми фигурами, получаем в результате четное число. Аналогичный расчет для черных фигур показывает, что ими сделано в общей сложности нечетное число ходов. Итак, белые сделали четное, а черные — нечетное число ходов. Так как партию начинают белые, то в нашей позиции ход черных, и именно они дают мат после 1... Kc1:c2!

Приведенную задачу можно рассматривать как элементарное введение в ретроградный анализ. Во многих ретроградных задачах «путешествие в прошлое» значительно сложнее и «опаснее». При этом особенно много приключений происходит при решении задач на «правило 50 ходов». Это правило заключается в том, что если 50 ходов подряд на доске не произошло ни одного взятия и ни одна пешка не сделала хода, то партия признается ничьей.

Рассмотрим этюд на рис. 19. Как будто у черных нет защиты от неизбежного мата после Fh6—f8. И все же они делают ничью парадоксальным, на первый взгляд, ходом 1... Ch2—g1!! Вся соль в том, что данная позиция, как показывает ее глубокий и тонкий ретроанализ, могла возникнуть в реальной партии лишь в том случае, если



в течение последних 50 ходов белых и 49 ходов черных на доске не было ни одного взятия и движения пешек! Таким образом, играя  $Cg1!!$ , черные добиваются ничьей по «правилу 50 ходов». Очевидно, любой другой их ход связан либо со взятием неприятельской фигуры, либо с движением пешек.

Перейдем теперь к задачам о маршрутах коня. Под маршрутом коня мы всюду в книге понимаем такое его последовательное перемещение, при котором каждое поле доски он посещает один и только один раз. Мы говорим, что маршрут замкнут, если последним ходом конь возвращается на исходное поле. Если не требуется, чтобы конь

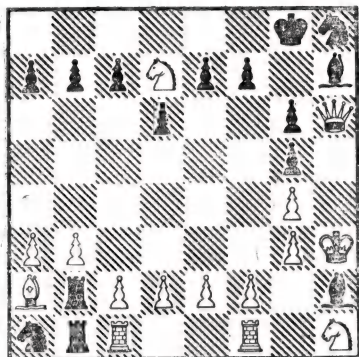


Рис. 19. Н. Пласкин. Черные начинают и делают ничью

посетил все поля доски, то мы говорим о пути коня по доске. Те же термины — «маршрут» и «путь» — используются нами и для других фигур. Каждому маршруту или пути коня или другой фигуры соответствует некоторый график, получающийся в результате последовательного соединения отрезками центров полей, посещаемых данной фигурой. Графиками движения фигур мы не раз будем пользоваться ниже.

*Доказать, что на доске  $m \times n$  замкнутый маршрут коня может существовать только в том случае, если доска содержит четное число полей.*

Окунев приводит чисто алгебраическое доказательство, однако «четность» доски сразу вытекает из следующего простого соображения. В любом замкнутом маршруте конь-хамелеон посещает одинаковое число белых и черных полей, т. е. тех и других на доске поровну, а значит — общее число полей четно.

Как мы видим, для существования замкнутого маршрута коня важна не столько «четность» доски, сколько наличие на ней одинакового числа белых и черных полей. Таким образом, если некоторая доска произвольной формы (не обязательно прямоугольная) содержит различное число белых и черных полей, то можно сразу сказать, что замкнутого маршрута коня на ней не существует. Ясно также, что произвольный маршрут коня (не обязательно замкнутый) можно искать лишь на таких досках, у которых число полей разного цвета, либо одинаковое, либо отличается на единицу.

Следующая задача показывает, что даже «четность» и прямоугольность доски еще не гарантируют существования замкнутого маршрута.

*Доказать, что ни при каком  $n$  на доске  $n \times 4$  не существует замкнутого маршрута коня.*

Докажем это от противного. Пусть при некотором  $n$  на доске  $n \times 4$  замкнутый маршрут коня существует. Поля, которые расположены на верхней и нижней горизонталях, назовем крайними, а остальные — средними. Так как с крайних полей конь может попасть только на средние, которых имеется  $2n$ , то из  $4n$  ходов, образующих маршрут,  $2n$  сделаны с крайних на средние. Тогда оставшиеся  $2n$  ходов конь совершил со средних на крайние. Поскольку каждым ходом конь-хамелеон меняет цвет поля, то все поля крайних горизонталей должны быть окрашены в один цвет, а средних — в другой. Противоречие.

Задачам о маршрутах коня специально посвящена следующая глава. А сейчас мы рассмотрим несколько задач о путях коня (в которых, по нашей терминологии, конь не обязан посещать всех полей доски).

**Задача о «коне Аттилы».** На шахматной доске стоят белый конь и черный король. Некоторые поля доски считаются «горящими», недоступными для коня. Конь должен дойти до неприятельского короля, повергнуть его и вернуться на исходное место. При этом ему запрещено становиться на «горящие» поля и на поля, которые уже пройдены. «Трава не растет там, где ступил мой конь!» — похвалялся вождь гуннов Аттила, намекая, что предводительствуемые им полчища уничтожают все живое на своем пути.

На рис. 20, а конь Аттилы стоит на поле  $g4$ , неприятельский король — на  $b3$ , а «горящие» поля заштрихо-

ваны. Задачи такого типа решаются в теории графов, неоднократно упоминаемой в нашей книге. Геометрически граф проще всего определить как множество точек (вершин графа), некоторые пары которых (возможно, все) соединены прямолинейными отрезками или дугами (ребрами графа). Путем в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину.

На рис. 20, б изображен «граф коня» для рассматриваемой задачи. Его вершины расположены в центрах полей, доступных коню, и пары вершин соединены ребрами, если между соответствующими полями возможен ход коня.

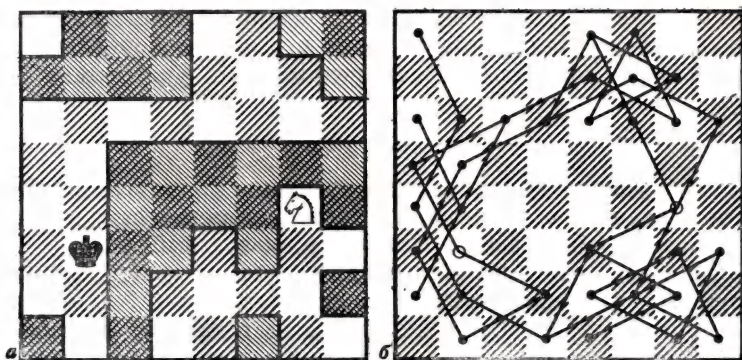


Рис. 20. Задача о коне Аттилы:

а — конь Аттилы; б — граф коня Аттилы

В результате задача свелась к нахождению такого пути в полученном графе, который не содержит ни одной вершины более одного раза и, кроме того, проходит через обе заданные (на рис. 20, б они обведены кружками). Методы решения таких «лабиринтных» задач можно найти в различных книгах по теории графов<sup>19</sup>. Для коня Аттилы на нашей доске искомым путь нетрудно найти и непосредственно, он состоит из следующих восемнадцати ходов:  $Kg4-f6-e8-g7-e6-f8-g6-e7-c6-a5 : b3-d2-b1-a3-b5-d6-f7-h6-g4$ . Для своей «победы» коню Аттилы пришлось побывать на всех полях, не «сожженных» в начале сражения.

<sup>19</sup> См., например: К. Берж. Теория графов и ее применение. М., ИЛ, 1962.



Аналогия между графиком движения фигуры и ее графом очевидна. Отличие состоит в том, что граф отражает все возможные ходы фигуры (в данной задаче), а график — лишь ее определенный путь по доске.

Введем на бесконечной шахматной доске прямоугольную систему координат. В этой системе шахматные вертикали и горизонтали обозначаются целыми числами (положительными и отрицательными), а всякое поле задается парой таких чисел — абсциссой и ординатой. При этом вертикали обычной доски можно обозначить не буквами, а числами 1, 2, . . . , 8. Кстати, именно такой «нотацией» пользуются шахматисты в игре по переписке; скажем, ход Kb1—c3 они обозначают так: 21—33.

С поля  $(s, t)$  конь в один ход может попасть на восемь полей  $(x, y)$ , координаты которых отвечают целочисленным решениям следующего неопределенного уравнения:

$$(x - s)^2 + (y - t)^2 = 5.$$

Это уравнение (оно легко получается из теоремы Пифагора) лежит в основе многих чисто математических исследований свойств коня. Например, известный шахматист XIX в. К. Яниш, исходя именно из этого уравнения, обнаружил разнообразные свойства движения коня (некоторые из них приводит Окунев). В нашей книге мы опускаем результаты такого рода, поскольку для их изложения требуется громоздкий алгебраический аппарат.

Ладья ходит по вертикалям и горизонталям доски, слон — по диагоналям, а ферзь, объединяющий их ходы, — по вертикалям, горизонталям и диагоналям. Как ни странно, для коня также существуют прямые, вдоль которых он перемещается. Эти прямые проходят через центр поля, на котором стоит конь, и заключены между прямыми, соответствующими вертикалям (или горизонталям) и диагоналям доски, также проходящим через поле  $a$ .

*На сколько полей бесконечной шахматной доски может попасть конь с данного поля за  $p$  ходов?*

Обозначим искомое число полей через  $N(p)$ . Можно проверить, что  $N(0) = 1$ ,  $N(1) = 8$ ,  $N(2) = 33$ . За три хода ( $p = 3$ ) конь с данного черного поля может попасть на все белые поля некоторого восьмиугольника, имеющего центр в исходном поле. Методом математической индукции нетрудно показать, что при любом  $p \geq 3$  конь может ока-

заться на всех одноцветных полях соответствующего восьмиугольника (при четных  $p$  — того же цвета, что и начальное поле; при нечетных  $p$  — противоположного). Подсчитав число полей в таком восьмиугольнике, получим  $N(p) = 17p^2 + 4p + 1$  ( $p \geq 3$ ).

Заметим, что для остальных шахматных фигур последняя задача не представляет особого интереса. Король за  $p$  ходов может попасть на любое поле квадрата  $(2p + 1) \times (2p + 1)$  с центром в данном поле. Дальнобойные фигуры уже за один ход могут оказаться на бесконечном числе полей, за два хода слон попадает на все одноцвет-

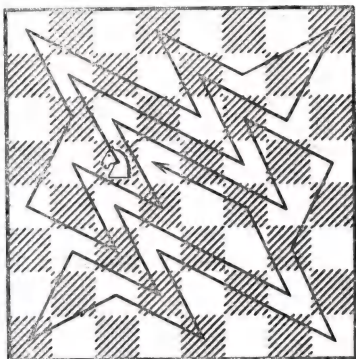


Рис. 21. Самый длинный несамопересекающийся путь коня на шахматной доске

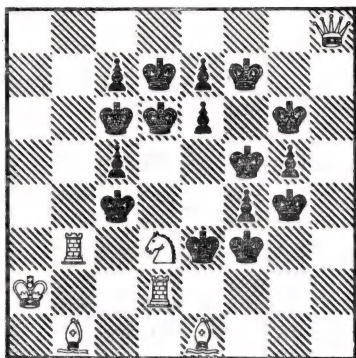


Рис. 22. Конь идет на е5 и объявляет мат десяти черным королям

ные поля бесконечной доски, а ферзь и ладья — на ее любое поле.

Рассмотрим фигуру, ход которой состоит из перемещения на  $a$  полей вдоль одного направления (вертикали или горизонтали) и на  $b$  полей вдоль другого. Такую фигуру будем называть «обобщенным конем»  $(a, b)$ . Обоснованием служит то обстоятельство, что при  $a = 1, b = 2$  (или  $a = 2, b = 1$ ) получается самый обычный конь. При том или ином выборе чисел  $a, b$  возникают самые разнообразные задачи о коне  $(a, b)$ . Напрашивается следующий вопрос.

*При каких  $a$  и  $b$  конь  $(a, b)$  с данного поля бесконечной доски может попасть на любое другое?*

Ясно, что если конь может переместиться на соседнее поле доски (по вертикали или горизонтали), то он может оказаться и на любом поле. Из некоторых утверждений теории чисел можно вывести, что на соседнее поле конь попадает в том и только в том случае, когда числа  $a$  и  $b$  взаимно просты и имеют разную четность. Эти условия и являются решением задачи. Ясно, что для обычного коня (1, 2) они выполняются.

С обобщенным конем мы еще встретимся в главе 13. В следующей главе, также специально посвященной этой самой хитрой шахматной фигуре, мы будем заниматься исследованием маршрутов коня по всем полям доски, а пока что рассмотрим одну интересную задачу о его пути.

*На шахматной доске найти самый длинный несамопересекающийся путь коня.*

Под несамопересекающимся путем (маршрутом) фигуры на доске мы всюду понимаем такой путь, график которого не имеет самопересечений (и касаний). В нашей задаче искомый путь состоит из 35 ходов (рис. 21). Любопытно, что максимальный путь почти одновременно и независимо друг от друга нашли сразу две ЭВМ — американская и западногерманская. Машина установила также, что существуют лишь четыре основных решения задачи — не переходящие друг в друга при поворотах и зеркальных отражениях доски.

Автор задачи исследовал ее для всех досок  $m \times n$  при  $m, n \leq 9$  и на каждой из них нашел довольно длинные несамопересекающиеся пути коня (без доказательства их максимальности)<sup>20</sup>. В частности, для доски  $6 \times 6$  он предложил путь длиной в 16 ходов, и ни один человек из решавших задачу не сумел его удлинить. И вновь рекорд установила машина! Она не только обнаружила 17-ходовый путь, но и показала, что имеется лишь одно основное решение: Kf5—d6—e4—f2—d3—e1—c2—a1—b3—d2—c4—e3—d5—b6—a4—c3—b5—d4 (доска  $6 \times 6$  занимает шесть первых вертикалей и горизонталей обычной доски).

В заключение этой главы отметим, что среди всех фигур лишь конь способен одним своим ходом объявить мат сразу десяти неприятельским королям! (См. рис. 22).

---

<sup>20</sup> L. Yarbrough. Uncrossed Knight's Tours.— «J. Recreat. Math.», 1968, 1, N 3.



## ЗАДАЧА О ХОДЕ КОНЯ

Эта глава посвящена самой интересной задаче о коне и, пожалуй, вообще самой известной шахматно-математической задаче. Она заключается в нахождении маршрута коня на шахматной доске.

*Обойти конем все поля шахматной доски, посетив каждое из них по одному разу.*

В литературе эту задачу обычно называют просто задачей о ходе коня. Особая популярность задачи объясняется тем, что в XVIII и XIX вв. ею занимались многие крупные математики, в том числе великий Леонард Эйлер, посвятивший ей большой мемуар «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не подчиняется никакому исследованию»<sup>21</sup>. Хотя задача была известна и до Эйлера, лишь он впервые обратил внимание на ее математическую сущность, поэтому задачу часто связывают с его именем.

Значительно труднее проблема, состоящая не в отыскании определенного маршрута коня, а в нахождении всех маршрутов и подсчете их числа. Увы, эта задача не решена до сих пор, и шансов на успех немного. Известно, правда, что число решений не превосходит  $S_{163}^{63}$  (это число состоит из ста цифр), но больше 30 миллионов. Математик Ф. Миндинг, подошедший к проблеме с алгебраической точки зрения, предложил метод, позволяющий вывести формулу для числа всех решений, однако вычисления, которые следует при этом произвести, практически неосуществимы, и поэтому метод Миндинга представляет лишь теоретический интерес.

Литература, посвященная задаче о ходе коня, весьма обширна. Те или иные методы нахождения маршрутов можно найти в самых разнообразных источниках. Среди них следует выделить книгу Крайчика «Проблема коня», которая, как видно из названия, целиком посвящена этой теме (эта книга входит в упомянутую во введении фундаментальную работу Крайчика). Об алгебраическом подходе, основанном на исследованиях Яниша, рассказы-

<sup>21</sup> В «Commentationes arihm. coll.», S.-Pb., t. I, 1849.

вается у Окунева, а у Шуберта <sup>22</sup> можно найти подробный исторический обзор задачи о ходе коня. Остановимся на некоторых наиболее интересных методах нахождения маршрутов коня.

*Рамочный метод Мунка и Коллини.* (Коллини — секретарь знаменитого философа Вольтера). Шахматную доску разделим на две части: внутреннюю, состоящую из 16 полей, и внешнюю, имеющую форму рамы и состоящую из 48 полей (рис. 23, а). На полях внутреннего квадрата запишем заглавные буквы А, В, С, D — так, чтобы каждая из них, повторенная четыре раза, образовала квадрат или ромб, по всем сторонам которого может ходить

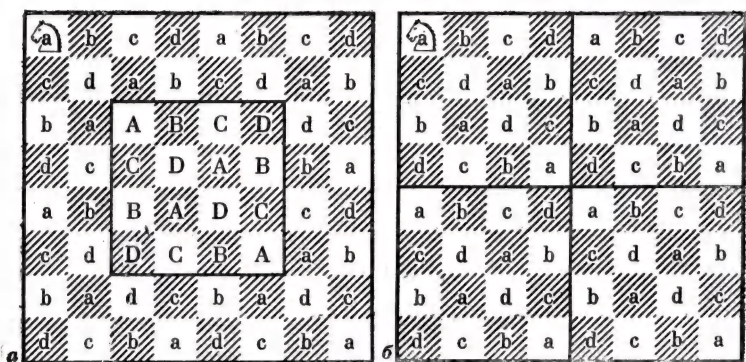


Рис. 23. Задача о ходе коня:

а — рамочный метод Мунка и Коллини;

б — метод Полиньяка и Роже — деление на четверти

конь. Те же буквы, только строчные, запишем на рамочных полях так, чтобы ходы коня по каждой из букв образовали замкнутые многоугольники, окаймляющие центральный квадрат.

Конь начинает ходить от какого-нибудь рамочного поля, проходит вокруг рамы по выбранной букве, например а, и в 12 ходов исчерпывает эту букву (при этом последнее поле не должно быть угловым). Затем он переходит во внутренний квадрат, но не на букву А, а на какую-

<sup>22</sup> Г. Шуберт. Математические развлечения и игры. Одесса. 1923.

нибудь другую — *B*, *C* или *D*. Пройдя все поля, обозначенные этой буквой, конь снова переходит на раму — на букву, по которой еще не ходил, и вновь обегает вокруг рамы, исчерпывая до конца эту букву, — и т. д., пока не пройдет по всей доске.

*Метод Полиньяка и Роже — деление на четверти.* Этот метод проще предыдущего, хотя и похож на него. Разделим доску крестом на четыре квадрата (рис. 23, б). В каждом из них расставим буквы *a*, *b*, *c*, *d* точно так же, как во внутреннем квадрате на рис. 23, а. Конь начинает движение с любой буквы, проходит в выбранном квадрате по всем четырем полям с этой буквой, затем переходит на ту же букву соседнего квадрата, и т. д. Исчерпав все 16 полей с одной буквой, он меняет ее и снова зигзагом обегает доску. После четырех таких кругов все поля будут пройдены (как и в предыдущем методе, «круговые» маневры не должны заканчиваться на угловом поле).

Маршруты и пути коня по доске удобно нумеровать последовательными числами 1, 2, 3 . . . в соответствии с порядком ходов. В полном маршруте коня начальное поле имеет номер 1, а конечное — 64. Разумеется, изменив направление данного маршрута на противоположное, мы всегда можем начальное поле сделать конечным, и наоборот. Если маршрут замкнут, то поля 1 и 64 связаны ходом коня.

*Метод Эйлера и Вандермонда.* Этот метод, хотя и не является таким простым и эффектным, как два предыдущих, позволяет, в отличие от них, получать самые разнообразные маршруты коня.

В основе метода лежит возможность замены обратными всех ходов, начиная с поля, связанного ходом коня с конечным.

В качестве примера рассмотрим маршрут на рисунке 24, а. Используя связь поля 31 с конечным полем 64, мы можем получить еще один маршрут. Оставим все числа 1, . . . , 31 на своих местах, а числа 32, 33, . . . , 64 заменим соответственно числами 64, 63, . . . , 32. Иначе говоря, один последовательный путь (от поля 32 до поля 64) мы заменили другим, обратным (от 64 до 32). Теперь поле 32, поменявшее номер 32 на 64, стало конечным. Новый маршрут в старой нумерации полей можно записать так: от 1 до 31, 31—64 (один ход — с поля 31 на 64), от 64 до 32.



Указанный прием можно повторять многократно, получая все новые и новые маршруты. В исходном маршруте поле 49 также связано с 64, что дает нам другой производный маршрут: от 1 до 49, 49—64, от 64 до 50. В первом из найденных маршрутов поле 32 связано с 43 — и мы можем получить второй производный маршрут: от 1 до 31, 31—64, от 64 до 43, 43—32, от 32 до 42, и т. д.

Если дан некоторый маршрут, то, проявив определенную изобретательность, его можно преобразовать так, чтобы любое наперед заданное поле стало конечным (а значит, и начальным). Пусть, например, мы хотим сделать конечным поле d4, имеющее номер 56. Свяжем его с полем

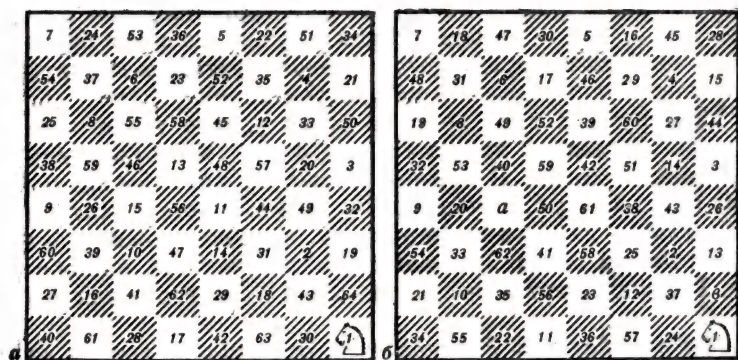


Рис. 24. Задача о ходе коня. Метод Эйлера и Вандермонда:

а — маршрут, преобразуемый в новые маршруты; б — преобразование «тупикового» маршрута

64 такими ходами: 64—31—32—57—56. Теперь дважды преобразуем исходный маршрут коня (рис. 24, а): 1) от 1 до 31, 31—64, от 64 до 32; 2) от 1 до 31, 31—64, от 64 до 57, 57—32, от 32 до 56. Последний маршрут заканчивается на поле d4, к чему мы и стремились. Описанным методом из незамкнутого маршрута иногда удастся получить замкнутый. Так, для превращения маршрута на рис. 24, а в замкнутый достаточно пути: от 11 до 17, от 10 до 1, от 18 до 31, от 64 до 57, от 32 до 45, от 56 до 46 заменить соответственно такими: от 1 до 7, от 8 до 17, от 18 до 31, от 32 до 39, от 40 до 53, от 54 до 64.

Основное достоинство метода Эйлера и Вандермонда заключается в том, что он помогает нам завершить путь коня в тех случаях, когда мы двигались без всякой системы и попали в тупик — дальше идти некуда, а еще остались непройденные поля. Пусть, например, мы уже побывали на 62 полях доски (путь от 1 до 62 на рис. 24, б, а поля а и б не посетили). Здесь поле а связано с полем 10, а поле 62 с полем 9. Это позволяет нам преобразовать путь от 1 до 62 в следующий: от 1 до 9, 9—62, от 62 до 10. После перенумерации поле b2 в этом пути меняет номер 10 на 62 и под номером 63 к пути присоединяется поле а. Теперь нам осталось присоединить к пути поле б. В этом нам помогает то обстоятельство, что из двух последовательных полей 57 и 58 первое связано с полем б, а второе — с полем а (имеющим сейчас номер 63). Теперь наш путь (в исходной нумерации) превращается в такой: от 1 до 9, 9—62, от 62 до 58, 58 — а, а — 10, 10—57. После очередной перенумерации номер 63 теперь получает бывшее поле 57, и, присоединяя к нему поле б, получаем, наконец, искомый маршрут (рис. 24, а; нумерация здесь последовательная — от 1 до 64).

Рассмотренные нами преобразования — далеко не единственные, позволяющие получать из одних маршрутов другие. Упомянем еще преобразования, связанные с поворотами доски и отражениями ее относительно осей симметрии или центра симметрии. Различные свойства маршрутов, основанные на идеях симметрии, исследованы в указанной ранее литературе. Заметим, кстати, что из одного замкнутого маршрута коня можно получить сразу 127 новых: 63 — сдвигом нумерации ходов, а из полученных 64 — еще столько же изменением направления маршрута.

**Правило Варнсдорфа.** Это довольно эффективное правило заключается в следующем.

1) при обходе доски коня следует всякий раз ставить на поле, из которого он может сделать наименьшее число ходов на еще не пройденные поля; 2) если таких полей несколько, то разрешается выбирать любое из них.

Правило Варнсдорфа предложено более 150 лет назад. Долгое время считалось, что оно действует безукоризненно. Позднее было установлено, что его вторая часть не совсем точна. Если в распоряжении коня имеется несколько возможностей, упомянутых в первой части правила,

то не все они являются равноценными. Полную ясность в этот вопрос удалось внести при помощи ЭВМ. Машинный эксперимент, проведенный в Тульском пединституте под руководством А. Есаяна, показал, что с какого бы поля доски конь ни начал свой маршрут, можно так пользоваться второй частью правила Варнсдорфа, что он попадет в тупик раньше, чем посетит все поля доски.

Все же на практике это простое правило дает неплохие результаты. Более того, иногда оно позволяет завершить путь коня даже в том случае, если несколько начальных ходов сделано произвольно. Например, на рис. 25, а конь с а1 уже сделал 40 ходов. В этой довольно трудной ситуации, пользуясь сформулированным правилом, коню удастся благополучно закончить маршрут. С поля 40 он мог бы пойти, кроме поля f2 с номером 41, на поля c5, d6, f6 и g3, каждое из которых связано с тремя свободными. Что же касается поля f2, то с него имеется только два свободных выхода (на h1 и d3), этим и объясняется выбор — число 41 ставится на поле f2 (рис. 25, б).

При следующем ходе возникает вопрос относительно полей h1 и d3. Второе поле связано с четырьмя свободными, а первое — только с одним g3, поэтому число 42 ставится на h1 (рис. 25, б). С поля h1 ход коня определяется однозначно — на поле g3, которое и получает номер 43. С этого поля у коня выбор между полями h5 и f5, причем каждое из них связано с тремя свободными. Согласно правилу, можно выбрать любое из них, в нашем случае конь идет на h5 (номер 44). Продвигаясь далее тем же образом, конь в конце концов попадает на поле 64.

Строго говоря, по правилу Варнсдорфа обход доски следует начинать с углового поля, так как в начальный момент именно с него конь может совершить наименьшее число прыжков. Путь коня на рис. 25, а до поля 13 согласуется с указанным правилом, однако уже очередной ход на поле 14 (e2) противоречит ему. С поля 13 у коня имелся выбор из пяти возможностей и, как легко видеть, «точнее» было пойти им на a2, а не на e2.

Правило Варнсдорфа, как показывает опыт, является достаточно эффективным не только для обычной шахматной доски, но и для других досок, на которых вообще имеется решение задачи.

Многие составители «хода коня» стремились внести в свое занятие, насколько это возможно, эстетический



элемент и достигли довольно любопытных результатов. Маршрут на рис. 26, принадлежащий Янишу, примечателен в нескольких отношениях. Он замкнут, образует «полумагический квадрат» (суммы чисел вертикалей и горизонталей равны магическому числу 260, а суммы чисел главных диагоналей отличны от него) и, кроме того, обладает необычной симметрией — при повороте доски на  $180^\circ$  первая половина маршрута (от 1 до 32) превращается во вторую (от 33 до 64).

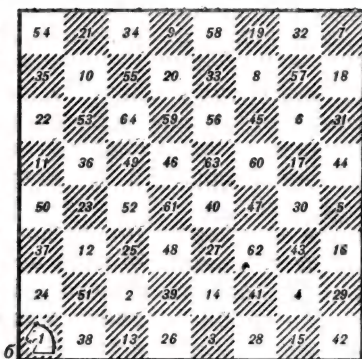
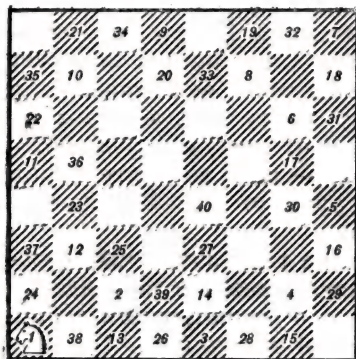
Еще со времен Эйлера известен так называемый «раздельный ход коня», который заключается в нахождении пути по одной половине доски, его симметричном дублировании и соединении обоих путей вместе (рис. 27). Для половины шахматной доски — доски  $8 \times 4$  — Крайчик нашел точное число решений. Это позволило ему подсчитать число «раздельных ходов коня» на доске  $8 \times 8$ , которое и дает нижнюю границу для числа всех решений задачи, указанную в начале этой главы.

Если говорить о графиках маршрутов коня, то здесь придумано множество необычных решений, изображающих различные предметы, буквы или знаки (известен даже график, посвященный Наполеону!). Два достопримечательных примера такого рода приведены на рис. 28. График первого маршрута (он является замкнутым) напоминает вазу, а график второго представляет собой цветок, части которого расположены в высшей степени симметрично.

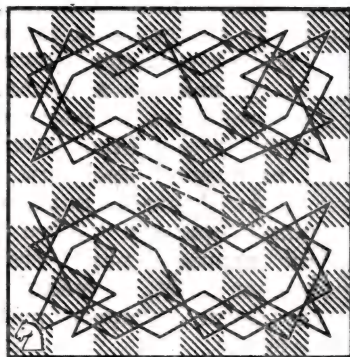
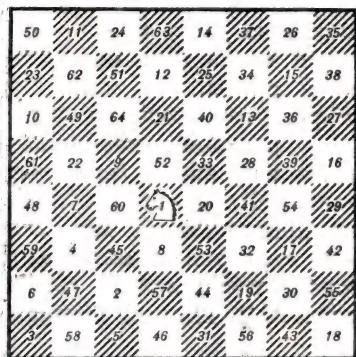
Наиболее интересное обобщение задачи о коне возникает при рассмотрении произвольной доски  $m \times n$ .

*При каких значениях  $m$  и  $n$  существует маршрут коня по всем полям доски  $m \times n$ ?*

Если одна из сторон доски меньше 3, то, очевидно, маршрута нет (исключение составляет вырожденный случай — доска  $1 \times 1$ , для «обхода» которой достаточно просто поставить коня на доску). Если одна сторона доски равна 3, то другая должна быть либо 4, либо не меньше 7. Если обе стороны больше 3, то обходной маршрут коня существует на всех досках, кроме  $4 \times 4$ . Итак, конь может обойти все поля доски  $m \times n$  при следующих условиях:  $m, n \neq 1, 2$ ; если  $m = 3$ , то  $n = 4$  или  $n \geq 6$ ; соответственно, если  $n = 3$ , то  $m = 4$  или  $m \geq 6$ ;  $m = 4, n \geq 5$ ;  $n = 4, m \geq 5$ .

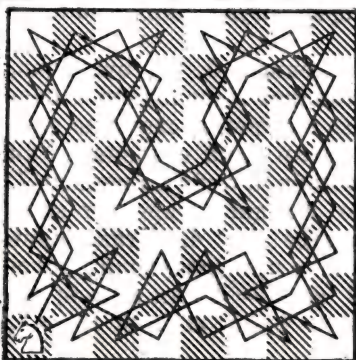


25

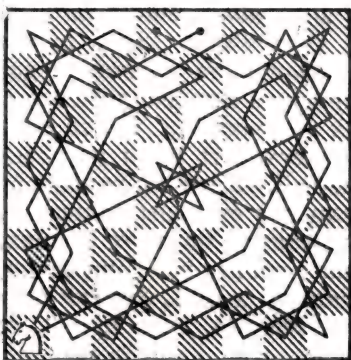


26

27



28



Для существования замкнутого маршрута прежде всего необходимо, чтобы доска была четной. Как показано в предыдущей главе, если одна сторона равна 4, то замкнутого маршрута нет. Если обе стороны четной доски больше 4, то замкнутый маршрут всегда существует. Наконец, если одна сторона равна 3, то для существования замкнутого маршрута другая должна быть не меньше 10. Как мы видим, наименьшая (по площади) прямоугольная доска, которую может обойти конь, имеет размеры  $3 \times 4$ , а наименьшие прямоугольные доски с замкнутыми маршрутами имеют размеры  $5 \times 6$  и  $3 \times 10$ .

Для обычной доски  $8 \times 8$ , а также для всех досок с меньшими сторонами, приведенные выше результаты устанавливаются непосредственно. Если же хотя бы одна сторона доски больше 8 (а другая больше 2), то ее легко разбить на доски со сторонами, меньшими 8, которые допускают маршруты коня. Из этих маршрутов и удастся «собрать» маршрут на исходной доске. Аналогичная идея используется и для доказательства существования замкнутых маршрутов на соответствующих четных досках.

Остановимся несколько подробнее на квадратных досках  $n \times n$ . На досках  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  маршрута нет — в первом случае вообще никакие два поля не связаны друг с другом, а во втором — центральное поле не связано с крайними.

Покажем, что нет маршрута и на доске  $4 \times 4$ . Подсчитаем, сколько ходов имеется в нашем распоряжении. Центральных полей здесь всего четыре, и они нам дают максимум восемь ходов (включая движение через углы доски). Остальные ходы образуют стороны квадратов  $a_2-b_4-d_3-c_1$  и  $a_3-c_4-d_2-b_1$ . Поскольку квадраты замкнуты, то из четырех ходов каждого в маршруте может быть использовано не более трех. Итак, всего имеем  $8 + 3 + 3 = 14$  ходов. Однако для того, чтобы обойти все поля доски  $4 \times 4$ , требуется 15 ходов — противоречие!

←

Рис. 25. Задача о ходе коня. Метод Варнсдорфа

Рис. 26. Магический маршрут коня

Рис. 27. Раздельный маршрут коня

Рис. 28. Ваза и цветок



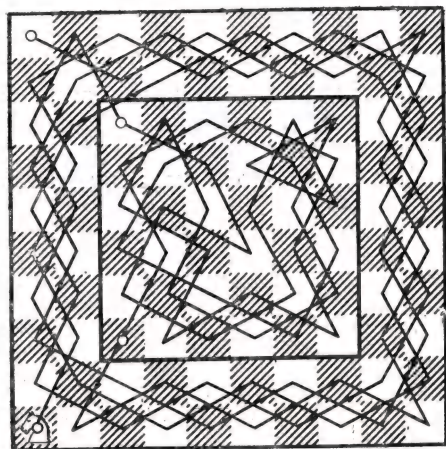
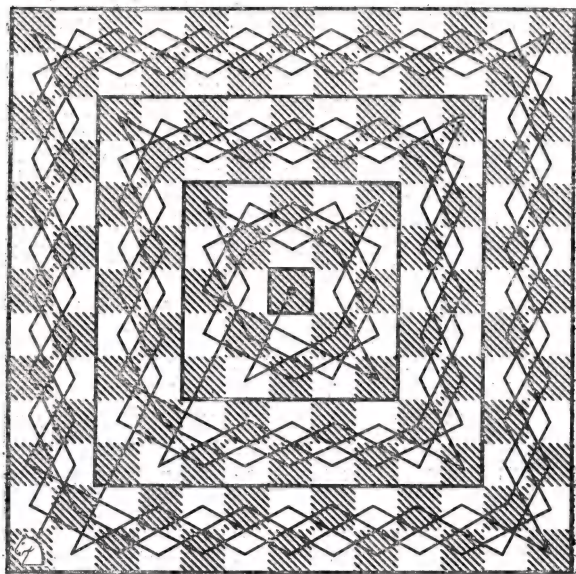
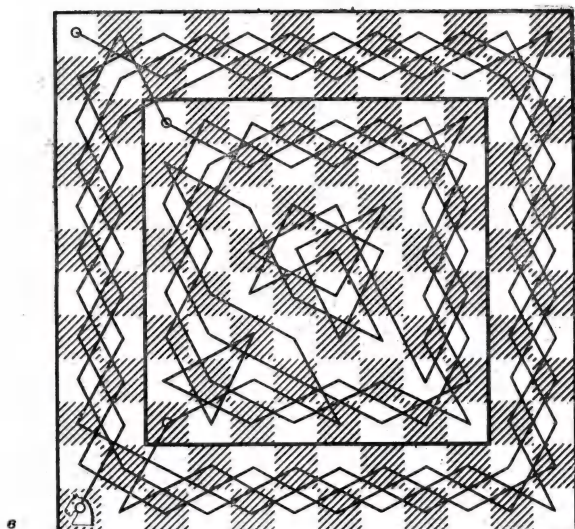


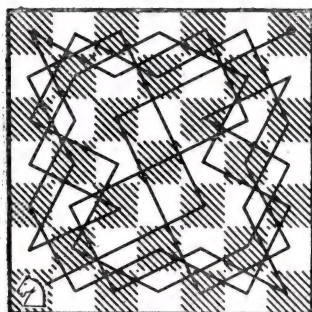
Рис. 29. Маршруты коня на квадратных досках

*a* — на досках  $(4k + 1) \times (4k + 1)$ ;

*б* — на досках  $(4k + 2) \times (4k + 2)$ ;



б



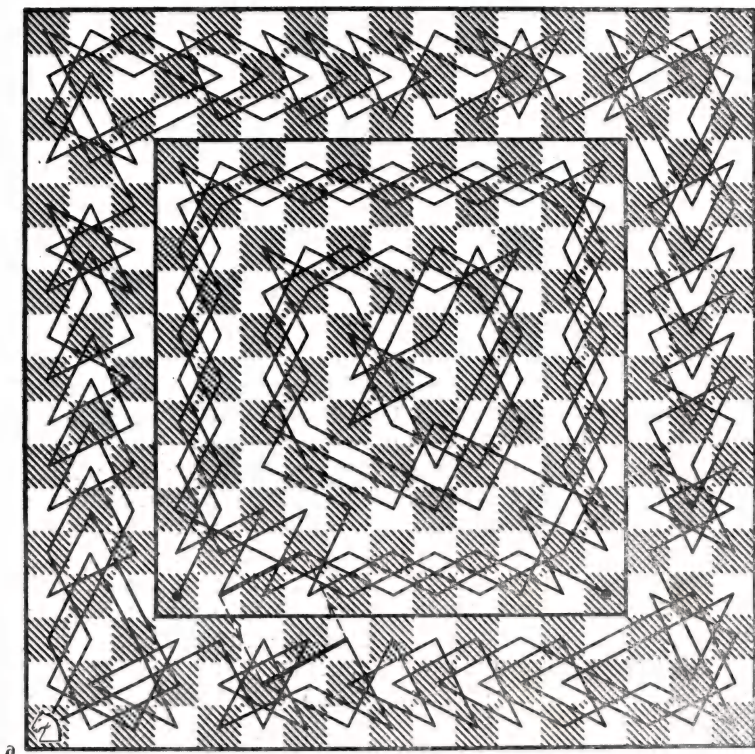
г

Рис. 29 (продолжение)

б — на досках  $4k \times 4k$ ;

г — на доске  $7 \times 7$ ;

На рис. 29, а предложен общий метод обхода досок  $n \times n$ , где  $n = 4k + 1$  ( $n = 1, 5, 9$  и т. д.). На рис. 29, б дан метод обхода досок для  $n = 4k + 2$  ( $n = 6, 10, 14$  и т. д.). Аналогичным образом (рис. 29в) обходятся доски при  $n = 4k$  ( $n = 8, 12, 16$  и т. д.). На рисунках 29, г и 29, д (внутренний квадрат) указаны маршруты — на досках  $7 \times 7$  и  $11 \times 11$ . Итак, мы имеем, в частности, маршруты коня на всех досках  $n \times n$  при  $n < 15$  ( $n \neq 2, 3, 4$ ).



а

Рис. 29 (окончание)

а — общий метод нахождения маршрутов коня на доске  $n \times n$  при  $n > 14$

Заметим, что маршруты на рис. 29, б и 29, в придумал недавно ленинградский школьник Н. Невветаев. Он же предложил интересный метод нахождения маршрутов на всех досках  $n \times n$  при  $n \geq 15$ . Этот метод опирается на то, что при любом  $n \geq 14$  существует замкнутый обход полосы ширины 3, окаймляющей доску  $(n - 6) \times (n - 6)$ . На рис. 29, а изображен обход такой полосы для доски  $17 \times 17$ . Чтобы получить замкнутый обход полосы для любой доски  $n \times n$  при  $n \geq 14$ , надо взять такой же обход полосы, но увеличить число «треугольников» между парами полей, аналогичными парам с6 и с9, f15 и i15, o12 и o9, l13 и i3 (см. рис. 29, б); крайний случай полу-



чается при совпадении таких пар, внутренний квадрат при этом имеет размеры  $8 \times 8$ . Если мы имеем маршрут коня по внутренней доске, то для получения маршрута по всей доске  $n \times n$  нужно выкинуть ходы, помеченные на рис. 29, *д* сплошной линией, и добавить «пунктирные» ходы. При полном обходе, как мы видим, конь сначала идет по внутреннему квадрату, «отвлекается» на нашу полосу и, возвращаясь в квадрат, заканчивает путешествие.

Теперь очевидно, что нахождение маршрута на произвольной доске  $n \times n$  ( $n \geq 15$ ) сводится к нахождению маршрута на доске  $(n - 6) \times (n - 6)$ . В конце концов мы приходим к доске  $n \times n$ , где  $9 \leq n \leq 14$ . Поскольку для всех таких досок маршруты уже найдены, то наша задача решена полностью.

Нетрудно видеть, что прием Нецветаева дает возможность получить и замкнутые маршруты на всех четных квадратных досках ( $n \geq 6$ ). Заметим также, что обходы на рис. 29, *а*—29, *в* не дают общего решения, так как упущен случай  $n = 4k + 3$  (кстати, все получающиеся на рисунках маршруты для  $n \neq 4k + 3$  не замкнуты).

Еще один интересный вопрос: а нельзя ли для нахождения маршрутов в общем случае использовать полосы шириной не в три, а в два поля (как на рис. 29, *а*)? Увы, ответ здесь отрицательный. Доказано, что всю полосу шириной в два поля можно обойти конем лишь в том случае, если она окаймляет доску  $(4k + 1) \times (4k + 1)$ .

С точки зрения теории графов задача о ходе коня является частным случаем важной проблемы — нахождения гамильтонова пути в графе, т. е. пути, проходящего через все его вершины по одному разу. Этим и объясняется популярность задачи о ходе коня в литературе по теории графов (при этом рассматривается «граф коня»).

Задача нахождения гамильтонова пути в графе является, в свою очередь, частным случаем так называемой задачи коммивояжера, к которой сводятся самые разнообразные задачи одного из важнейших разделов прикладной математики — исследования операций. Требуется найти кратчайший путь коммивояжера, по которому он должен объехать ряд городов (связанных между собой некоторым числом дорог), посетив каждый из них по одному разу. Конечно, прежде всего здесь возникает вопрос, может ли коммивояжер вообще объехать все города с однократным посещением каждого из них. Таким образом,

можно считать, что настоящая глава посвящена путешествиям по шахматной доске «коня-коммивояжера».

В следующей задаче, не совсем похожей на предыдущие, мы не различаем двух ходов коня, связывающих одну и ту же пару полей, например,  $Kg1 - f3$  и  $Kf3 - g1$ .

*Можно ли из всех различных ходов коня на шахматной доске составить путь, содержащий каждый из них ровно по одному разу (при этом коню не запрещается посещать любые поля доски более одного раза).*

Убедимся, что эта задача не имеет решения. Поскольку ходы в маршруте коня не должны повторяться, то, попадая на некоторое поле одним ходом, мы должны покинуть его другим. Таким образом, каждое поле доски (кроме, быть может, начального и конечного полей в искомом маршруте) должно быть связано с другими полями четным числом ходов. Однако на доске имеется восемь полей ( $a2$ ,  $b1$  и симметричные им), с которых у коня имеется по три хода на другие поля доски, — и, значит, указанное условие не выполняется!

Выше мы уже говорили о гамильтоновом пути в графе, проходящем по одному разу через все его вершины. Путь, который проходит через все ребра графа, называется эйлеровым. Таким образом, мы фактически показали, что в графе коня гамильтонов путь существует, а эйлеров — нет.

Ниже будут приведены маршруты по всем полям доски и для других фигур, причем эти маршруты отыскать значительно проще, чем для коня. Существование этих маршрутов означает, что в графах всех фигур имеются гамильтоновы пути. Что же касается эйлерова пути, то им обладает только граф ладьи.

Касаясь обобщений задачи о коне, заметим, что множество интересных проблем возникает при рассмотрении «обобщенного коня» ( $a, b$ ). Важно отметить, что если числа  $a$  и  $b$  имеют одинаковую четность, то конь может попасть только на поля одного цвета. Те или иные маршруты коня ( $a, b$ ) на досках  $m \times n$  при различных значениях  $a, b, m, n$  можно найти у Крайчика.

В следующих двух задачах речь идет о маршрутах коня на объемной (пространственной) доске. Эта доска представляет собой параллелепипед  $m \times n \times k$  (в частности, куб  $n \times n \times n$ ), единичные кубики которого образуют

«поля», лежащие в одном слое параллелепипеда и отстоящие в этом слое соответственно на одно и два «поля».

*Обойти конем все поля объемной шахматной доски  $4 \times 4 \times 4$ , посетив каждое по одному разу.*

Указанная доска, как и обычная, содержит 64 поля, но только объемных. Обход этой доски шахматным конем фактически состоит в том, чтобы занумеровать ее поля-кубики последовательными числами от 1 до 64 так, чтобы каждые два «поля» с соседними номерами были связаны ходом коня. Для решения задачи объемную доску удобно представить в виде четырех горизонтальных слоев  $4 \times 4 \times 1$ , лежащих один над другим. На рис. 30 поверхности этих слоев занумерованы числами 1, 2, 3, 4. Нетрудно про-

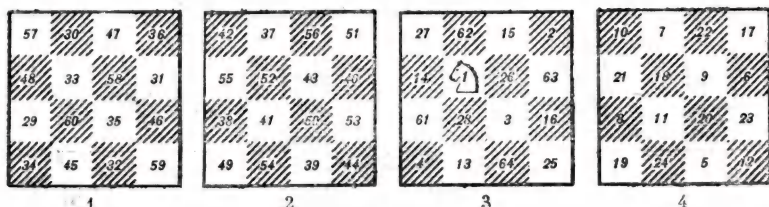


Рис. 30. Обход конем объемной доски  $4 \times 4 \times 4$

верить, что, двигаясь в указанной последовательности, мы обойдем все поля доски  $4 \times 4 \times 4$ .

*Обойти конем поверхность объемной доски  $8 \times 8 \times 8$ , посетив каждое ее поле по одному разу (поля плоские).*

В данной задаче хотя и фигурирует объемная доска, конь перемещается по шести обычным двумерным доскам  $8 \times 8$ , образующим грани куба. Трудность задачи состоит лишь в «сопряжении» всех шести маршрутов коня. Удобно воспользоваться разверткой куба на рис. 31, где решение изображено графически. Как мы видим, маршрут является замкнутым, т. е. конь может начать и кончить свое путешествие на любом из  $64 \times 6 = 384$  полей поверхности нашей доски.

В заключение рассказа о ходе коня рассмотрим задачу на плоской, но бесконечной шахматной доске.

*На бесконечной шахматной доске расставлены пешки через три поля на четвертом (например, b1, f1, b5, f5 и т. д.). Может ли конь обойти все свободные поля такой доски, побывав на каждом из них по одному разу?*



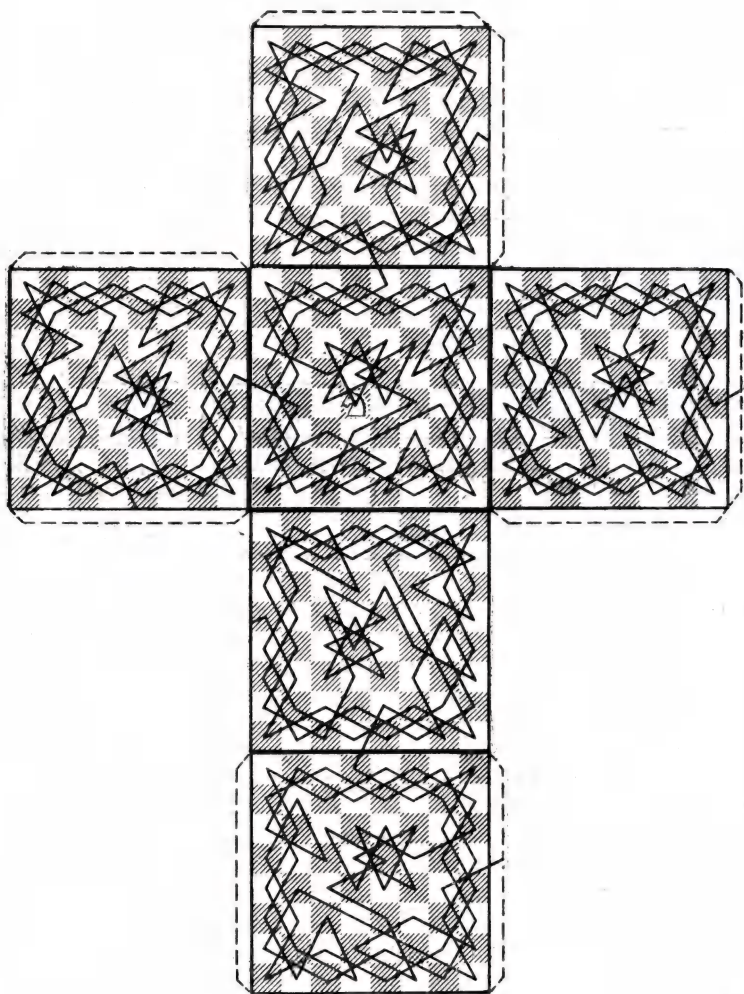


Рис. 31. Обход конем поверхности объемной доски  $8 \times 8 \times 8$

Требуемого маршрута не существует. Для того чтобы это показать, рассмотрим два квадрата:  $196 \times 196$  и концентрично окаймляющий его  $200 \times 200$ . Ясно, что при указанной расстановке пешек все они стоят на полях одного цвета, в нашем примере — белого. При этом с каждого из  $196^2/2 = 19\,208$  черных полей внутреннего квадрата при обходе доски конь попадает на одно из  $200^2/2 = 2\,500 = 17\,500$  свободных белых полей окаймляющего квадрата. Так как  $17\,500 < 19\,208$ , то на некоторые белые поля конь попадает более одного раза — противоречие.

## Глава 6

### НЕПОВОРОТЛИВАЯ ЛАДЬЯ

Ладья является самой распространенной фигурой в комбинаторных задачах на шахматной доске и часто упоминается даже в серьезной математической литературе. Что общего, скажем, между шахматным термином «ладья» и чисто математическим понятием «многочлен»? Тем не менее американский математик Дж. Риордан<sup>23</sup> как раз применяет термин «ладейный многочлен»! Чем это вызвано? Оказывается, большой класс важных комбинаторных задач сводится к подсчету числа тех или иных расстановок ладей на шахматной доске. При рассмотрении ряда сложных задач существенную роль играет многочлен

$$r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_kx^k + \dots + r_nx^n,$$

где  $r_k$  — число размещений  $k$  ладей на доске  $n \times n$ , не угрожающих друг другу ( $k = 1, \dots, n$ ). Этот многочлен Риордан и называет ладейным. Как мы видим, такое название вполне оправдано.

Многие задачи из комбинаторики, теории групп и теории чисел удобно интерпретируются в «ладейных» терминах. Приведем один комбинаторный пример<sup>24</sup>. Пусть  $n$  рабочих назначаются на  $n$  различных работ, причем каждая из них должна выполняться только одним рабочим.

<sup>23</sup> Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.

<sup>24</sup> Примеры из теории групп можно найти у Крайчика, а из теории чисел — у Окунева.

Спрашивается, сколькими способами можно осуществить такое назначение?

Поставим в соответствие рабочим горизонтали шахматной доски  $n \times n$ , а работам — ее вертикали. Если  $i$ -й рабочий назначается на  $j$ -ю работу, то на поле, соответствующее пересечению  $i$ -й горизонтали и  $j$ -й вертикали, поставим ладью. Так как каждая работа выполняется одним рабочим и каждый рабочий назначается на одну работу, то в результате на любой вертикали и горизонтали будет стоять по одной ладье. Другими словами, никакая пара из этих  $n$  ладей не будет угрожать друг другу<sup>25</sup>. Таким образом, нашей задаче о назначении можно придать вполне шахматный характер.

*Сколькими различными способами на доске  $n \times n$  можно расставить  $n$  не угрожающих друг другу ладей?*

Заметим, что при расстановке более  $n$  ладей хотя бы на одной вертикали или горизонтали их окажется не менее двух. Таким образом,  $n$  есть наибольшее число ладей на доске  $n \times n$ , не угрожающих друг другу. Одна из простейших расстановок заключается в расположении ладей вдоль главной диагонали доски (на полях  $a1, b2, c3, d4, e5, f6, g7, h8$  для обычной доски)<sup>26</sup>.

Выясним теперь, сколько существует указанных расположений  $n$  ладей. Назовем ладью, стоящую на первой вертикали, — первой, стоящую на второй вертикали — второй, и т. д., вплоть до  $n$ -й ладьи, стоящей на  $n$ -й вертикали. Первую ладью можно поместить на любую из  $n$  горизонталей, затем вторую — на любую из  $(n - 1)$  оставшихся горизонталей (занятая первой ладью исключается, так как никакие две ладьи не должны угрожать друг другу), третью ладью — на любую из  $(n - 2)$  оставшихся горизонталей и т. д., вплоть до  $(n - 1)$ -й ладьи, для которой остается выбор из двух горизонталей, и по-

<sup>25</sup> Конечно, в шахматном смысле фигуры одного цвета не угрожают друг другу. И в том случае, когда мы говорим (пользуясь общепринятой терминологией), что две фигуры угрожают друг другу (находятся под ударом, атакуют), имеется в виду лишь то, что поля, на которых они расположены, связаны между собой ходом этих фигур.

<sup>26</sup> Начиная с этой главы, мы будем рассматривать задачи, в которых тех или иных фигур явно больше, чем в одном комплекте шахмат. В этом случае можно, как правило, обойтись пешками, наделив их привилегиями соответствующих фигур (в последней задаче — ладей).



следней,  $n$ -й ладьи, которая ставится на единственную оставшуюся горизонталь. Комбинируя  $n$  различных расположений первой ладьи с  $(n - 1)$  расположениями второй,  $(n - 2)$  — третьей и т. д., получаем  $n(n - 1) \dots 2 \cdot 1 = n!$  различных расположений всех  $n$  ладей. Это число и является искомым. В частности, на обыкновенной шахматной доске восемь ладей, не угрожающих друг другу, можно расположить  $8! = 40\,320$  различными способами.

Если ладьи занумерованы, то существует уже  $(n!)^2$  различных расположений  $n$  ладей, не угрожающих друг другу. Это следует из того, что  $n$  подходящих полей можно выбрать  $n!$  способами и столько же способов имеется для расположения на этих полях  $n$  занумерованных ладей.

Итак,  $n$  рабочих можно назначить на  $n$  работ  $n!$  способами. Пусть теперь нужно сделать новое назначение, причем каждый рабочий хочет сменить свою предыдущую работу. Сколько существует таких назначений? В «ладейной» постановке эта задача формулируется так:

*Сколькими различными способами на доске  $n \times n$  можно расставить  $n$  ладей, не угрожающих друг другу и не стоящих на главной диагонали (для обычной доски — на диагонали  $a1-h8$ )?*

Дополнительное условие значительно затрудняет решение задачи. Даже Эйлеру не удалось найти общую формулу для числа  $A_n$  указанных расстановок. Правда, он вывел рекуррентное соотношение  $A_n = (n - 1)(A_{n-1} + A_{n-2})$ , с помощью которого можно последовательно определить значения  $A_n$  для любого  $n \geq 3$  ( $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 1$ ). Окунев приводит элементарный вывод формулы для  $A_n$ , она имеет следующий вид:

$$A_n = n! \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Для  $n = 8$  получаем

$$A_8 = 8! \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{8!} \right) = 14\,833,$$

т. е. при дополнительном условии число расстановок восьми ладей, не угрожающих друг другу, уменьшается почти вдвое.

*Какое наибольшее число ладей можно расставить на доске  $n \times n$  так, чтобы каждая из них была под ударом не более чем одной из остальных?*

В отличие от предыдущих задач здесь ладьи могут угрожать друг другу, правда, более одной угрозы не допускается. Покажем, что больше  $4n/3$  ладей расставить указанным образом невозможно. Пусть  $k$  ладей расставлены на доске с соблюдением условия задачи. На всех полях с ладьями напомним число 0, затем с каждой из  $n$  вертикалей сделаем следующую операцию: если на ней стоят два числа (имеются в виду только поля с ладьями), то прибавим к обоим по 1; если одно число, то прибавим 2. Теперь точно такую же операцию сделаем со всеми горизонталями. Легко видеть, что в результате на каждом из  $k$  полей с ладьями будет написано число 3 или 4 и поэтому сумма  $s$  всех написанных чисел не меньше  $3k$ . С другой стороны, поскольку в каждую из  $n$  вертикалей и затем в каждую из  $n$  горизонталей мы добавили не более чем 2, то  $s$  не больше  $4n$ . Итак,  $3k \leq s \leq 4n$ , откуда  $k \leq 4n/3$ .

Для  $n = 8$  получаем  $k \leq 32/3$ , т. е.  $k \leq 10$ . Ровно 10 ладей, удовлетворяющих условию задачи, можно расставить так: ладьи a8, b8, c6, c7, d5, e5, f3, f4, g2, h2. Аналогично на доске  $n \times n$  (при любом  $n$ ) можно расставить  $[4n/3]$  ладей (квадратные скобки означают целую часть числа), что и является ответом на задачу.

Ясно, что ферзей указанным способом можно расставить не больше, чем ладей. На обычной доске 10 ферзей, т. е. максимальное число, расставляются, например, так: ферзи a8, b8, c3, c4, d7, e7, f2, g1, h5, h6. Однако в общем случае задача для ферзей не решена.

Очевидно, восемь ладей, не угрожающих друг другу на доске  $8 \times 8$ , держат под обстрелом все поля доски<sup>27</sup>. В общем случае наименьшее число ладей, обладающих тем же свойством, равно  $n$ . Если ладей меньше, то найдется хотя бы одна вертикаль и горизонталь, на которых нет ладей, и поле, стоящее на их пересечении, не атаковано ладьями. Возникает следующая комбинаторная задача:

*Сколькими различными способами можно расставить  $n$  ладей на доске  $n \times n$  так, чтобы они держали под угрозой все поля доски?*

Если  $n$  ладей угрожают всем полям доски, то либо на каждой ее вертикали, либо на каждой горизонтали стоит по одной ладье (если бы существовали вертикаль и гори-

<sup>27</sup> Если не оговорено противное, то в такого сорта задачах мы всюду подразумеваем поля доски, свободные от уже расставленных фигур (в данном случае ладей).

зонталь, свободные от ладей, то поле, находящееся на их пересечении, не было бы атаковано). Число расстановок  $n$  ладей по одной на каждой вертикали (или на каждой горизонтали) равно  $n^n$  (первую ладью можно поставить  $n$  способами на одно из полей первой вертикали; вторую, независимо от первой,  $n$  способами на одно из полей второй вертикали и т. д.). На первый взгляд кажется, что общее число расположений равно  $n^n + n^n = 2n^n$ . Однако при таком подсчете по два раза учтены все расположения, в которых на каждой вертикали и горизонтали стоит по одной ладье, и число таких расположений надо вычесть. Так как каждое из них характеризует-

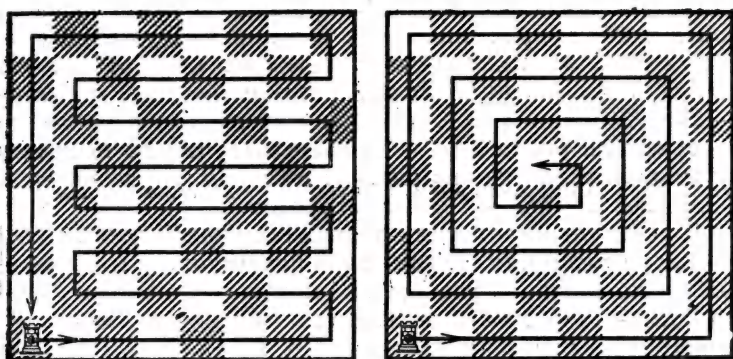


Рис. 32. Маршруты ладьи на шахматной доске

ся тем, что никакая пара ладей не угрожает друг другу, то решением задачи является число  $2n^n - n!$ . Для обычной доски число расстановок восьми ладей, обстреливающих все ее поля, равно  $2 \times 8^8 - 8! = 33\,514\,312$ .

Исследуя свойства «коня-коммивояжера», мы видели, что найти обходной маршрут для него не так-то легко. Что же касается ладьи, то ее «неповоротливость» заметно упрощает дело. Два несложных маршрута показаны на рис. 32, причем первый из них является замкнутым. Так же как и для коней, на нечетных досках замкнутого маршрута ладьи не существует, поскольку черные и белые поля в таком маршруте чередуются и их число должно быть четным.



Пусть ладья обошла все поля доски  $n \times n^{28}$ . Какое наименьшее число поворотов при этом она могла сделать?

Будем говорить, что ладья движется вдоль горизонтали (вертикали), если при своем ходе она перемещается с одного поля этой горизонтали (вертикали) на другое. При обходе доски ладья должна хотя бы раз двигаться вдоль каждой вертикали или вдоль каждой горизонтали (если найдется вертикаль, вдоль которой ладья ни разу не двигалась, то каждое ее поле ладья проходила, двигаясь «поперек», т. е. вдоль соответствующей горизонтали). Пусть, для определенности, ладья двигалась хотя бы один раз вдоль каждой вертикали. На любую из этих вертикалей (кроме, быть может, той, с которой начинается обход, и той, на которой обход заканчивается) ладья должна войти и после движения вдоль нее выйти. При этом вход и выход обязательно осуществляются с поворотами. Таким образом, общее число поворотов не меньше, чем  $(n - 2) \times 2 + 1 + 1 = 2(n - 1)$ . Для любого  $n$  маршрут, содержащий ровно  $2(n - 1)$  поворотов, можно получить из второго маршрута на рис. 32; в данном случае ( $n = 8$ ) ладья делает  $2(8 - 1) = 14$  поворотов.

Так как при посещении ладью всех полей доски число ее ходов на единицу больше числа поворотов, то минимальное число ходов, за которое она может обойти доску, равно  $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ . Из этого следует, что второй маршрут на рис. 32 является кратчайшим на обычной доске (он состоит из 15 ходов). Замкнутый маршрут уже содержит на один ход больше.

Итак, с маршрутами ладьи у нас имеется полная ясность. Рассмотрим теперь несколько задач о ладье, которые по типу отличаются от предыдущих.

В задаче на рис. 33 следует дать мат черному королю, удовлетворяя трем условиям: а) мат ставит ладья с номером 8, б) в процессе решения ладья не покидают выделенный квадрат (кроме последнего хода); в) в заключительной позиции ладьи расположены по кругу в той же последовательности, что и в исходной позиции.

Вообще говоря, мат здесь дается первым же ходом после  $Ld5:d6$ . Однако дополнительные условия настолько ус-

<sup>28</sup> Мы не требуем, чтобы ладья при обходе останавливалась на каждом поле доски, лишь бы она проходила мимо всех ее полей (то же самое касается ферзя и слона, о маршрутах которых речь пойдет ниже).

ложняют дело, что мат удастся объявить только на 32 (!) ходу. Приведем номера ладей, которые совершают ходы (у черного короля выбор невелик — с d7 на d8 и обратно): 5, 6, 7, 5, 6, 4, 3, 6, 4, 7, 5, 4, 7, 3, 6, 7, 3, 5, 4, 3, 1, 8, 2, 4, 5, 6, 7, 1, 8, 2, 1, и ладья с номером 8 берет слона с матом.

**Король-самубийца.** На доске  $1000 \times 1000$  стоят белый король и 499 черных ладей. Доказать, что при произвольном начальном расположении этих фигур король за некоторое число ходов может встать под шах, как бы черные ни играли.

Пошлем короля сначала в левый нижний угол доски и затем по главной диагонали вправо вверх. Можно считать, что после первого хода короля из угла (Кра1-b2)

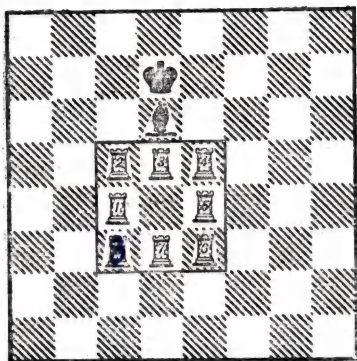


рис. 33. Мат ладьям номер 8; ладьи располагаются по кругу в том же порядке

и ответного хода черных три нижние горизонтали и три левые вертикали свободны от ладей, иначе уже вторым ходом король встанет под шах. Таким образом, все ладьи находятся выше и правее короля. Рассмотрим теперь тот момент, когда король сделал еще 997 ходов по главной диагонали и черные ответили на его последний ход. При этом ни одна из ладей не должна находиться на трех верхних горизонталях и трех правых вертикалях. Иначе говоря, все ладьи расположены левее и ниже короля (иначе он следующим ходом опять добьется своей цели). Это означает, что к рассматриваемому моменту каждая ладья должна была сделать два хода, поменяв свою вертикаль и горизонталь до того, как на них появится король. Но ладей имеется 499 и за 997 ходов им не переместиться — не хватает ровно одного хода!

Еще одна интересная задача, в которой участвуют одновременно ладья и король, принадлежит Штейнгаузу <sup>29</sup>.

**Заминированная доска.** Некоторые поля доски «заминированы» так, что король не может попасть с вертикали  $h$  на вертикаль  $h$ . Доказать, что в этом случае ладья может пройти с первой горизонтали на восьмую по одним «заминированным» полям.

Будем считать, что все заминированные поля существуют, т. е. при разминировании хотя бы одного из них король прорывается с края на край (в противном случае часть полей разминируем). Можно убедиться, что тогда всякое заминированное поле, не являющееся граничным, примыкает к двум другим заминированным полям; кроме того, на крайних вертикалях заминированных полей вообще нет, а заминированные поля крайних горизонталей примыкают только к таким же полям соседних горизонталей. Это означает, что на доске имеется «мост» между крайними горизонталями, состоящий из заминированных полей (ладья сразу переходит с первой горизонтали на вторую, затем проходит некоторое число полей, быть может 0, по второй горизонтали, переходит на третью и т. д.). Любопытно, что за полное решение этой задачи редакция польского журнала «Математика», по совету Штейнгауза, назначила 20 очков (вместо первоначальных 3), но... решения так и не последовало!

Уберем теперь королей с доски и продолжим наш рассказ о ладьях с формулировки еще одной, довольно сложной задачи Штейнгауза, решение которой можно найти в первой из названных книг.

Возьмем доску  $n \times n$ , отличающуюся от обычной раскраской, а именно: распределение черных и белых полей произвольно, лишь бы на каждой вертикали было хотя бы одно белое поле и хотя бы одна вертикаль состояла целиком из белых полей. Доказать, что на такой доске можно расставить некоторое количество ладей, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) ладьи стоят только на белых полях;
- 2) на доске находится, по крайней мере, одна ладья;

<sup>29</sup> Г. Штейнгауз. Задачи и размышления. М., «Мир», 1974. Шахматно-математические задачи этого известного польского популяризатора математики можно найти также в его книгах «Математический калейдоскоп» (М. — Л., Гостехтеоретиздат, 1949) и «Сто задач» (М., Физматгиз, 1959).



3) ладьи не атакуют друг друга;

4) если свободное белое поле атакуется ладьей по горизонтали, то оно атакуется и по вертикали.

На каждом поле доски  $n \times n$  записывается произведение номеров горизонтали и вертикали, которым принадлежит это поле. Требуется расставить  $n$  ладей, не угрожающих друг другу, так, чтобы сумма чисел на полях, занимаемых ими, была наибольшей.

Ладьи следует расположить на главной диагонали (для обычной доски на полях a1, b2, c3, d4, e5, f6, g7, h8). Докажем это от противного. Пусть в оптимальном решении имеются ладьи, не стоящие на главной диагонали. Обозначим через  $i$  номер самой первой вертикали с такой

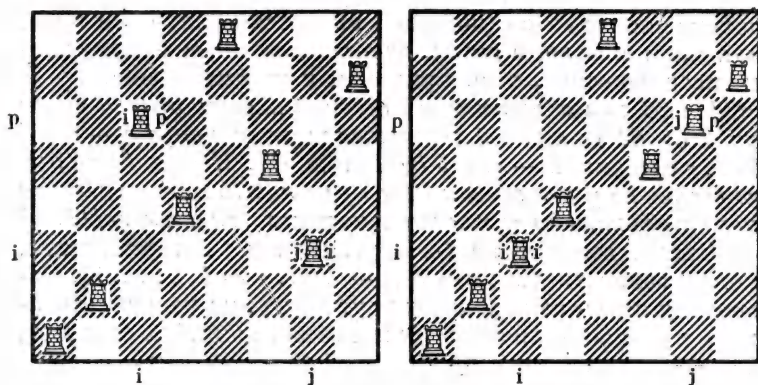


Рис. 34. Задача об оптимальной расстановке ладей

ладьей, а через  $p$  — номер соответствующей горизонтали; очевидно,  $p > i$  (рис. 34, а). На каждой горизонтали должна стоять ровно одна ладья; пусть  $j$  — номер вертикали, на которой стоит ладья  $i$ -й горизонтали. Эта ладья также стоит вне главной диагонали и находится правее первой, т. е.  $j > i$ .

Переставим теперь две наши ладьи следующим образом. Оставляя их на своих вертикалях, первую поставим на  $i$ -ю горизонталь (диагональное поле), а вторую на  $p$ -ю (при этом ладьи останутся на своих вертикалях, но «обменяются» горизонталями — рис. 34, б). Ясно, что при новой расстановке они по-прежнему не угрожают друг другу. Подсчитаем суммы чисел (при обоих расположениях)

для двух переместившихся ладей — остальные слагаемые при перестановке не меняются. В исходной расстановке сумма равна  $ip + ji$ , а в новой равна  $i^2 + jp$ . Так как  $j, p > i$ , то имеем

$$(i^2 + jp) - (ip + ji) = (jp - ip) - (ji - i^2) = \\ = p(j - i) - i(j - i) = (p - i)(j - i) > 0.$$

Таким образом, во втором случае сумма больше, а это противоречит предположению о том, что исходное решение оптимально. Заметим, что, по существу, мы здесь использовали так называемый перестановочный прием, встречающийся при решении различных оптимизационных задач (например, в теории расписаний). Этот прием заключается в следующем: мы предполагаем, что некоторое расположение объектов (порядок) является наилучшим в том или ином смысле, а затем, переставляя объекты, улучшаем расположение, т. е. приходим к противоречию.

*На 64 полях шахматной доски выписаны подряд числа от 1 до 64 (в верхней горизонтали слева направо — от 1 до 8, в следующей — от 9 до 16 и т. д.). Поставим на доске восемь не угрожающих друг другу ладей. Какие значения может принимать сумма чисел на полях, занятых ладьями?*

Число, стоящее на  $i$ -й вертикали и  $j$ -й горизонтали, можно записать так:  $i + 8(j - 1)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 8$ ). Поскольку ладьи не угрожают друг другу, на каждой вертикали и горизонтали стоит только одна из них. Это означает, что искомая сумма равна

$$\sum_{i=1}^8 i + \sum_{j=1}^8 8(j - 1) = (1 + 2 + \dots + 8) + \\ + 8(0 + 1 + \dots + 7) = 260$$

и не зависит от конкретного расположения не угрожающих друг другу ладей. Задача легко обобщается для доски  $n \times n$ .

Хотя ладья со своей «прямолинейностью» уступает в хитрости коню, тем не менее в шахматной математике, как мы видим, она занимает достойное место. Следующая задача получила приз на шахматно-математическом конкурсе в 1960 г.<sup>30</sup>

<sup>30</sup> В этом конкурсе, посвященном 25-летию союза финских проблемистов, участвовало 150 задач от 42 авторов из 16 стран. Подобные конкурсы постоянно проводятся в Югославии, Финляндии, ФРГ и в других странах.

*На полях a1 и h1 стоят белые ладьи, а на полях a8 и h8 — черные. Сколькими способами могут кратчайшим путем поменяться местами белые и черные ладьи?*

Кратчайшая перестановка осуществляется за четыре хода белых и черных, например: 1. Ла1—d1 Ла8—a1 2. Лd1—d8 Лh8—g8 3. Лd8—a8 Лg8—g1 4. Лh1—h8 Лg1—h1. Подсчет показывает, что всего существует 330 необходимых перестановок. Довольно много задач такого типа, в которых требуется определить число способов кратчайших переходов от одной позиции к другой, можно найти у Фабеля.

В заключение этой главы заметим, что ряд сложных и интересных задач с участием ладьи (в частности, использующих понятие «ладейный многочлен») можно найти в упомянутой выше книге Н. Виленкина.

## Глава 7

### ФЕРЗЬ-ЧАСОВОЙ

Если конь — самая «хитрая» шахматная фигура, а ладья — самая «неповоротливая», то ферзь является самой сильной шахматной фигурой. Возможности ферзя чрезвычайно богаты, и ему принадлежат многие рекорды на шахматной доске. Заметим, что большинство нерешенных шахматно-математических проблем связано именно с ферзями.

*Задача о часовых.* Около каждой тюремной камеры можно поставить часового. Находясь у одной из камер, часовой видит также, что происходит в некоторых других камерах, из которых к данной ведут коридоры. Каково наименьшее число часовых, необходимое для наблюдения за всеми камерами?

Если шахматную доску рассматривать как тюрьму (да простят нам шахматисты такую аналогию!), причем ее поля считать камерами, а вертикали, горизонтали и диагонали — коридорами, то «часовыми» естественнее всего назначить ферзей, которые могут вести наблюдение в произвольном направлении. При этом задаче о часовых можно придать следующую шахматную интерпретацию.



*Какое наименьшее число ферзей можно расставить на шахматной доске при условии, что они держат под обстрелом все свободные поля доски?*

Оказывается, пять ферзей вполне способны справиться со всей шахматной «тюрьмой». Доказано, что существует ровно 4860 способов, которыми можно расставить на доске пять ферзей-часовых. В расстановке на рис. 35, а ферзи держат под обстрелом все свободные поля доски, но сами не угрожают друг другу. На рис. 35, б все ферзи стоят на одной диагонали и, значит, защищают друг друга. Таким образом, во второй расстановке ферзи обстреливают не только свободные поля доски, но и занятые.

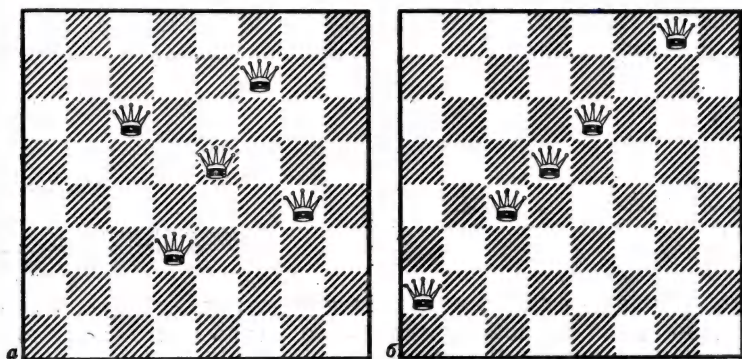


Рис. 35. Пять ферзей, доминирующих на шахматной доске

а — ферзи не угрожают друг другу; б — под боем все 64 поля доски

Как бы мы ни расставляли на доске четырех ферзей, по меньшей мере два ее поля уже останутся «без примотра», например а8 и b7, если ферзи стоят на полях с5, d1, g6, h2.

Пусть четыре ферзя стоят на полях а1, b1, g1, h1. Кские четыре хода они должны сделать, чтобы взять под обстрел максимальное число свободных полей доски?

После ходов Фа1—а4, Фb1—b4, Фg1—g6 и Фh1—g2 лишь три поля доски — с1, с7 и с8 — недоступны ферзям (на одно поле больше возможного).

Пусть теперь на доске стоит всего один ферзь — на поле d1. Какой геометрически самый длинный несамопересекающийся путь он может сделать за пять ходов?

Искомый путь состоит из таких пяти ходов:  $\Phi d1-h1-a8-h8-h2-c7$ . Любопытно, что большинство решающих эту задачу предлагают другой путь:  $\Phi d1-h1-h8-a1-a8-g8$ . По числу посещаемых полей он действительно длиннее ( $32 > 30$ ), однако в геометрическом смысле (см. гл. 3) — короче. Если ширину одного поля доски считать равной 1, то первый путь длиннее второго всего на 0,05, но все-таки длиннее! В самом деле, получаем:

$$d_1 = (4 + 7\sqrt{2} + 7 + 6 + 5\sqrt{2}) = (17 + 12\sqrt{2});$$

$$d_2 = (4 + 7 + 7\sqrt{2} + 7 + 6) = (24 + 7\sqrt{2});$$

$$d_1 - d_2 = (5\sqrt{2} - 7) \approx 0,05$$

Рассмотрим теперь несколько задач о маршрутах ферзя.

*За какое наименьшее число ходов ферзь может обойти все поля шахматной доски?*

Конечно, ферзь может воспользоваться одним из маршрутов ладьи и потратить на обход столько же ходов (15 — на незамкнутый и 16 — на замкнутый). Однако он не обязан перемещаться так прямолинейно, а при умелом движении обходит всю доску за 14 ходов. Существует шесть замкнутых маршрутов ферзя, состоящих из 14 ходов. Один из них показан на рис. 36, а, вот еще два маршрута:  $\Phi a1-h8-h3-c8-f8-a3-g3-g8-a2-h2-b8-b1-h1-a8-a1$ ;  $\Phi a1-h1-a8-a2-h2-b8-b4-f4-f8-c8-g4-g8-b3-h3-h8-a1$ ; остальные три маршрута получаются из приведенных отражением доски относительно диагонали  $a1-h8$ . Для двадцати исходных полей ( $d1$ ,  $d3$ ,  $d4$  и симметричных им) замкнутый маршрут ферзя уже состоит из 15 ходов. На рис. 36, а мы видим квадрат пересечений (в районе полей  $d5$ ,  $d6$ ,  $e5$ ,  $e6$ ), характерный для каждого замкнутого маршрута.

Заметим, что все кратчайшие маршруты ферзя самопересекаются. Несамопересекающимися являются только 15-ходовые маршруты. На рис. 36, б приведен один из таких маршрутов, имеющий весьма симметричный вид (разумеется, ладья по такому маршруту пройти никак не может!).

В популярной занимательной задаче требуется четырьмя линиями перечертить девять точек, расположенных

в форме квадрата, не отрывая карандаша от бумаги. Этой задаче легко придать шахматную интерпретацию.

Выберем на шахматной доске произвольный квадрат  $3 \times 3$ . Как за четыре хода ферзь может обойти все поля этого квадрата?

Пусть наша доска расположена в левом нижнем углу обычной доски  $8 \times 8$ <sup>31</sup>, тогда искомым «маневром» является такой: Фа2—а4—d1—а1—с3. Как мы видим, ферзь вынужден дважды покинуть доску  $3 \times 3$ .

Прежде чем продолжить наш рассказ о ферзе, несколько отвлечемся и закончим тему, связанную с обходом шахматной доски другими фигурами. С маршрутами ко-

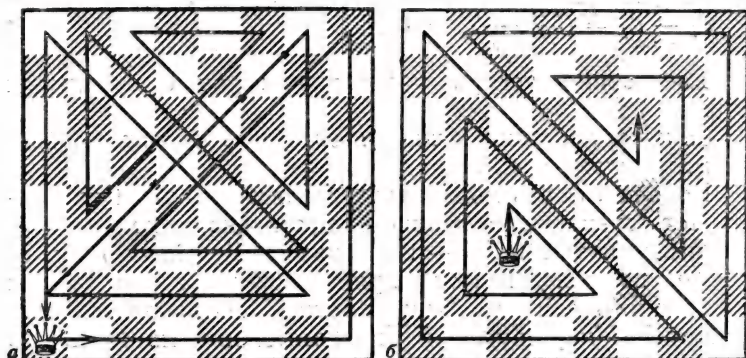


Рис. 36. Обходные маршруты ферзя на шахматной доске

а — 14-ходовый самопересекающийся маршрут; б — 15-ходовый несамопересекающийся маршрут

ня, ладьи и ферзя мы уже знакомы, осталось выяснить ситуацию с королем и слоном. Король может обойти всю доску за 63 хода (а в замкнутом случае за 64 хода), двигаясь, например, по маршруту ладьи, но только более медленным темпом. Интересна следующая задача:

*Доказать, что если замкнутый маршрут короля по всей доске не имеет самопересечений, то он содержит не меньше 28 «прямых» ходов (вдоль вертикалей и горизонталей доски).*

<sup>31</sup> При рассмотрении досок размера меньше, чем  $8 \times 8$ , для удобства всегда считаем, что они расположены в левом нижнем углу обычной шахматной доски.



Прежде всего приведем маршрут, в котором король делает в точности 28 «прямых» ходов (рис. 37, а). Рассмотрим теперь произвольный замкнутый маршрут без самопересечений, и занумеруем все 28 крайних полей доски числами 1, 2, ..., 28 в том порядке, в котором король посещает их. Этот маршрут можно разбить на 28 участков: от первого поля до второго, от второго до третьего, и т. д., от поля 28 до поля 1.

Покажем, что оба крайних поля каждого из этих участков являются соседними на границе доски (рис. 37, а). Предположим противное: пусть крайние поля хотя бы одного из участков не соседние. Для участка, показан-

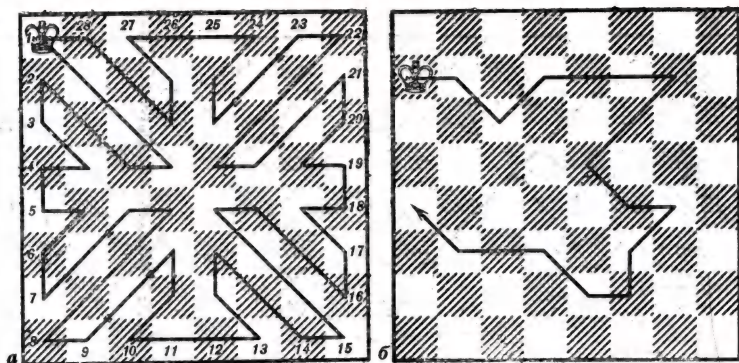


Рис. 37. Задача о маршруте короля

а — в маршруте 28 «прямых» ходов; б — нет пути между полями а6 и с1

ного на рис. 37, б, такими являются поля а7 и а4. Поскольку маршрут короля замкнут, то начальное поле и направление обхода можно выбрать произвольно. Будем считать, что маршрут, участок которого изображен на рисунке, начинается с поля а7 и идет в направлении к полю а4. Поскольку поля а7 и а4 не соседние, то рассматриваемый участок а7—а4 разбивает доску на две части. Возьмем два поля, принадлежащие разным частям, например поля а6 и с1. Возвращаясь с а4 на а7, король должен побывать и на этих полях. При этом участок а6—с1 обязательно пересечет участок а7—а4. Таким образом, мы получили противоречие с тем, что маршрут короля не имеет самопересечений.

Итак, крайние поля каждого из наших 28 участков являются соседними на границе доски. Ввиду того, что эти поля имеют разный цвет, вдоль каждого из участков король делает хотя бы один «прямой» ход. Из этого и следует, что искомый маршрут содержит не менее 28 ходов по вертикали и горизонтали. Поскольку король может при желании все 64 хода сделать «прямые», то попутно мы выяснили следующее обстоятельство. Минимальная длина замкнутого, несамопересекающегося маршрута короля по всей доске равна 64, а максимальная равна  $28 + 36\sqrt{2}$ .

Слон, очевидно, не может обойти все поля доски, однако если ограничиться полями одного цвета, то задача

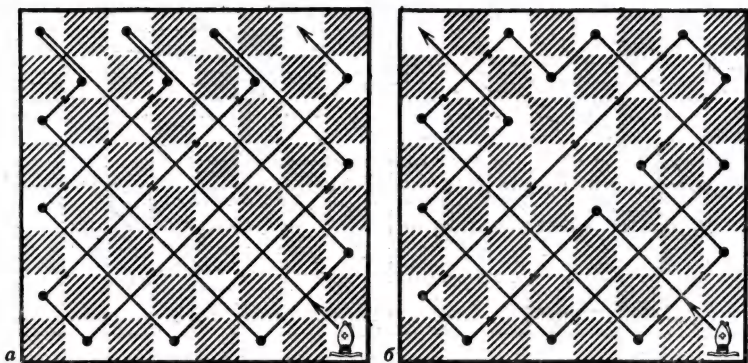


Рис. 38. Маршруты слона по одноцветным полям шахматной доски  
 а — 16-ходовый маршрут; б — 17-ходовый симметричный маршрут

о кратчайшем маршруте становится корректной и для него. Самый быстрый маршрут состоит из 16 ходов (рис. 38, а). Маршрут, предложенный Дьюдени (рис. 38, б), на один ход длиннее, но зато его график имеет более симметричную форму и, кроме того, в графике нет «точек возврата». Заметим, что при обходе всех одноцветных полей доски мимо некоторых из них слон вынужден пройти более одного раза, т. е. его маршрут всегда является самопересекающимся.

В общем случае быстрее всего маршрут слона по всем одноцветным полям доски состоит из  $\frac{5n}{2} - 4$  ходов при чет-

ных  $n$  и  $\frac{5n+1}{2} - 4$  ходов при нечетных  $n$  ( $n \geq 3$ ; во втором случае имеются в виду поля того цвета, которого на доске больше). Метод нахождения соответствующих маршрутов можно извлечь из рис. 38, а.

Интересный факт установил победитель XVI Международной математической олимпиады школьников (ГДР, 1974 г.) бакинец А. Григорян. Он доказал, что несамопересекающийся путь слона по доске проходит максимум через  $\frac{n^2-1}{2}$  полей при нечетном  $n$  (слон посещает все поля

того цвета, которого на доске меньше) и максимум  $\frac{n^2-n+2}{2}$  полей при четном  $n$ . Для обычной доски получаем, что слон проходит через 29 полей из 32 возможных. Вот один из искомых путей: Ch1—g2—h3—g4—h5—g6—h7—g8—e6—f5—e4—f3—e2—d1—c2—d3—c4—d5—c6—d7—c8—a6—b5—a4—b3—a2—b1. Непройденными здесь остались три поля: a8, e8 и f1. Поскольку длина хода слона между двумя полями равна  $\sqrt{2}$ , то мы выяснили также, что максимальная длина несамопересекающегося пути слона в зависимости от  $n$  равна  $\sqrt{2} \cdot \frac{n^2-3}{2}$  или  $\sqrt{2} \cdot \frac{n^2-n}{2}$ .

Закончим наше отступление от ферзевой темы еще одной задачей о маршруте слона <sup>32</sup>:

*С углового поля доски  $m \times n$  ( $m, n > 1$ ) начинается слон, который изменяет направление движения только на границе доски. Слон останавливается, как только достигает углового поля. При каких  $m$  и  $n$  он обойдет все поля доски?*

Можно показать, что при указанном передвижении слон в состоянии посетить все поля доски, тогда и только тогда, когда числа  $m-1$  и  $n-1$  взаимно просты.

Вернемся снова к задачам о ферзях. На обычной доске, как мы знаем, пять удачно расположенных ферзей держат под обстрелом все свободные поля. С увеличением размеров доски число «ферзей-часовых», естественно, возрастает, однако общая формула для доски  $n \times n$  до сих пор неизвестна. Любопытно, что на досках  $9 \times 9$ ,  $10 \times 10$

<sup>32</sup> Хотя задачи о королях и слонах встречаются в разных главах книги, специальные главы мы посвятили лишь наиболее популярным в шахматной математике фигурам — коню, ладье и ферзю.



и даже  $11 \times 11$  также достаточно иметь в распоряжении всего пять «ферзей-часовых». Необходимые расстановки показаны на рис. 39, причем сверху сразу для двух досок —  $10 \times 10$  и  $11 \times 11$ .

Пять ферзей и больше можно поставить на доске  $8 \times 8$ , чтобы какие-нибудь поля не находились под обстрелом. Даже восемь ферзей удастся расставить так, чтобы 11 полей (но не больше) находились вне поля их зрения (ферзи на полях a2, a7, b1, b3, b7, c2, g1, g2).

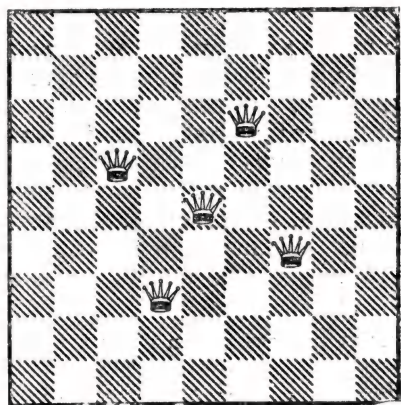
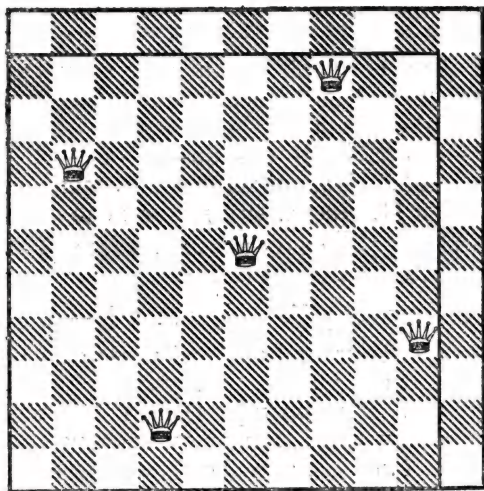


Рис. 39. Пять ферзей, доминирующих на досках  $9 \times 9$ ,  $10 \times 10$  и  $11 \times 11$

*Какое максимальное число ферзей можно расставить так, чтобы ферзи разного цвета не били друг друга, причем на доске должны находиться ферзи обоих цветов?*

Искомое число ферзей равно 43, при этом одна из сторон имеет всего одного ферзя, который может стоять на любом крайнем поле доски (42 ферзя другого цвета размещаются вне линий его действия). В общем случае на доске  $n \times n$  можно расставить максимум  $(n - 2) (n - 1)$  ферзей так, чтобы ферзи разного цвета не били друг друга.

*На доске  $n \times n$  ( $n > 1$ ) расставить  $2n$  ферзей так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло не более двух из них.*

Очевидно, более  $2n$  ферзей, удовлетворяющих условию задачи, расставить невозможно. На рис. 40, а дана рас-

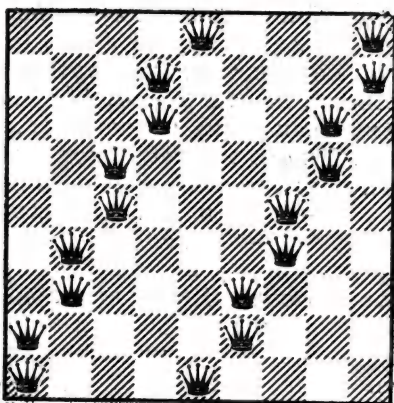
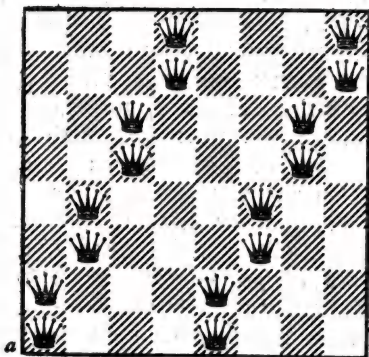


Рис. 40. Задача о  $2n$  ферзях

а — решение на четной доске;

б — решение на нечетной доске

становка 16 ферзей на доске  $8 \times 8$ , а на рис. 40, б — 18 ферзей на доске  $9 \times 9$ . Легко видеть, что первая расстановка обобщается для всех четных досок, а вторая для всех нечетных. На четных досках ферзи располагаются парами, а на нечетных одна пара ферзей (на средней вертикали) разбивается. Заметим, что решение этой задачи, найденное Лойдом для обычной доски (Фа2, а6, b4, b6, с7, с8, d2, d4, е5, е7, f1, f3, g5, g8, h1, h3), отличается от рис. 40, а и его не удастся обобщить на другие доски.

С математической точки зрения ферзь является самой интересной шахматной фигурой, и не случайно задачи о ферзях встречаются во многих главах нашей книги. В частности, следующая глава будет целиком посвящена классической задаче о расстановке восьми ферзей. Сейчас же остановимся еще на некоторых вопросах, имеющих более близкое отношение к шахматной игре.

Каждый начинающий шахматист быстро постигает искусство матования королем и ферзем одинокого короля противника. Известно, что при точной игре такой мат дается не позднее девятого хода. Заменим теперь короля сильнейшей стороны вторым ферзем. За сколько ходов в этом случае дается мат? Возникает следующая задача.

*За какое минимальное число ходов два ферзя могут заматовать одинокого короля противника на доске  $n \times n$ ? Тот же вопрос — для бесконечной шахматной доски.*

Оказывается, каковы бы ни были размеры доски, мат дается не позднее четвертого хода! Первым ходом один из ферзей дает шах по вертикали, в ответ на что неприятельский король отходит на одну из соседних вертикалей. Вторым ходом другой ферзь (с помощью первого) зажимает короля на двух вертикалях. При этом возникает позиция, как на рис. 41 (мы считаем сейчас, что обычная шахматная доска является как бы фрагментом бесконечной). Теперь на любой ход короля следует соответствующий горизонтальный шах, например на 2... Kpd4—e4 3. Фс1—с4+, и мат следующим ходом: 3... Kpe4—e5 (e3) 4. Фf8—f4 мат.

Черный король мог быть аналогично «схвачен» и по горизонталям. Ясно, что приведенное решение годится для произвольной доски  $n \times n$  (при  $n < 8$  оно еще короче), для прямоугольных досок и для бесконечной; при этом начальное расположение белых ферзей несущественно.



**Неприкосновенный король.** Белый король находится на поле с3 и не имеет права двигаться (поэтому он и называется неприкосновенным). Может ли белый ферзь с помощью своего неприкосновенного короля заматовать одинокого короля черных?

Эта задача была известна еще в прошлом веке. Многие шахматисты, в том числе гроссмейстеры, ошибочно думали, что заматовать короля нельзя. На помощь вновь была привлечена ЭВМ. Математики А. Брудно и И. Ландау<sup>33</sup> выяснили с помощью машины, что мат всегда дается, причем не позднее двадцать третьего хода и только при неприкосновенном короле на полях с3, с6, f3 и f6. Кажется,

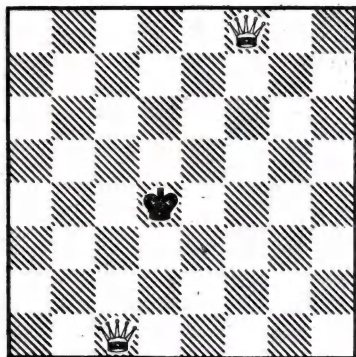


Рис. 41. На любой прямоугольной доске два ферзя матуют неприятельского короля не позднее четвертого хода

это был первый случай в истории шахмат (и математики), когда ЭВМ решила шахматную задачу раньше человека. Справедливости ради надо отметить, что если квалифицированному шахматисту сообщают, что мат есть, то он его находит сам.

Для решения, прежде всего, черного короля следует загнать на угловое поле а8. С этим заданием ферзь справляется довольно легко и при этом может попасть на d7 (рис. 42). Если теперь ход черных, то после 1... Кра8—b8 2. Фd7—c6! белые матуют в 10 ходов: 2... Крb8—a7 3. Фc6—c8! Кра7—b6 4. Фc8—d7! Крb6—c5 (4... Кра5 5. Фb7 и 4... Кра6 5. Фc7 Кра5 6. Фd6 приводит к основному варианту) 5. Фd7—e6 Крс5—b5 6. Фе6—d6

<sup>33</sup> А. Брудно, И. Ландау. Неприкасаемый король.— «Шахматы», 1969, № 19.

**Крb5—a5 7. Фd6—b4+ (7. Фd6—c6 — пат!) 7... Кра5—a6 8. Фb4—b8 Кра6—a5 9. Фb8—b7 Кра5—a4 10. Фb7—a6 мат.**

Если же на рис. 42 ход белых, то они должны передать очередь хода противнику. Это достигается методом, очень напоминающим метод «треугольника», рассмотренный нами во второй главе: **1. Фd7—d5+ Кра8—a7(1... Крb8 2. Фс6!) 2. Фd5—b5 Кра7—a8 3. Фb5—a6+ Кра8—b8 4. Фа6—с6! — и цель достигнута.**

Последний пример убедительно иллюстрирует силу ферзя, справившегося с неприятельским королем лишь при косвенной поддержке своего короля.

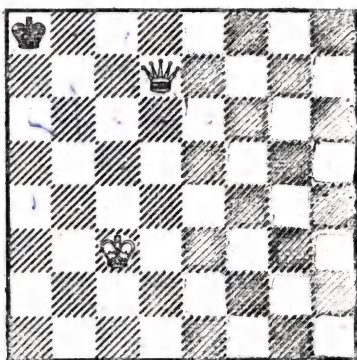


Рис. 42. Задача о неприкосновенном короле

Эндшпиль «ферзь с пешкой против ферзя» является одним из самых трудных. Вот какой курьезный случай произошел в 1968 г. в Москве на традиционном матче Москва — Ленинград. При счете  $39 \frac{1}{2} : 39 \frac{1}{2}$  (матч проводился на 40 досках в два круга) оставалась всего одна незаконченная партия, которая и решала судьбу матча. Черными играл ленинградский мастер В. Лявданский, белыми — московский мастер А. Волович. Ленинградец имел лишнюю пешку, и в случае успеха его команда побеждала. Доигрывание партии продолжалось ровно до той минуты, когда ленинградцы уже рисковали опоздать на поезд. В результате на доске возникла такая позиция — белые: Крг8, Фd5; черные: Кра2, Фf6, пb3.

Партию присуждала авторитетная комиссия. Однако вся беда состояла в том, что позицию «ферзь и коневая пешка против ферзя» шахматисты исследуют уже не один

десяток лет, а к окончательному мнению прийти так и не могут. Жюри в растерянности признало партию ничьей, что вызвало естественное возражение со стороны ленинградцев. Дело кончилось тем, что ответный визит москвичей в Ленинград не состоялся, и многолетняя традиция была нарушена...

Здесь мы имеем хороший пример того, как можно использовать шахматные «способности» ЭВМ. Если бы машина «разбиралась» в подобных окончаниях, то никакого инцидента не произошло бы. Математики Э. Комиссарчик и А. Футер (сотрудники Института проблем управления, где была создана «Каисса») решили научить ЭВМ оценивать окончания указанного типа <sup>34</sup>. Пока писалась эта книга, машина успела изучить только позиции с коновой пешкой на предпоследней горизонтали. Теперь про каждую из них можно точно сказать, выигрывает ли здесь сильнейшая сторона (белые) или нет, а если выигрывает, то за сколько ходов пешка проходит в ферзи.

Любопытно, что машина обнаружила две выигрышные позиции, в которых при наилучшей игре обеих сторон соотношение сил удастся изменить только на 59 ходу! Вот эти позиции. 1. Белые: Kpd6, Фа6, п.g7; черные: Kpc2, Фb1; 2. Белые: Kph4, Фа6, pg7; черные: Kpc2, Фb8. В обеих позициях ход черных. Рассмотрим первую из них. Тонкое маневрирование, начинающееся посредством 1. ...Фb4+, через 53 хода приводит к такому положению — белые: Kpd2, Фf2, pg7; черные: Kpb2, Фb3. Здесь черный ферзь вынужден занять пассивное положение — 54... Фg8, и после 55. Фb6+ Кра3 56. Фb7 Кра4 57. Kpc3 Кра5 58. Фb4+ Кра6 59. Фc4+ белые, наконец, разменивают ферзей и проводят свою пешку.

Найденные позиции показывают, что известное ничейное «правило 50 ходов» для подобных эндшпилей требует уточнения. По-видимому, это первый случай, когда ЭВМ «вмешивается» в шахматный кодекс... Теперь машине предстоит заняться позициями с белой пешкой на шестой горизонтали (или с черной пешкой на третьей — как в партии Волович — Лявданский).

Таким образом, есть надежда, что традиционные матчи Москва — Ленинград скоро возобновятся...

<sup>34</sup> О своей программе авторы рассказывают в статье «Об анализе ферзевого эндшпиля при помощи ЭВМ» в выпуске «Проблем кибернетики», упомянутом в главе 1.



С рассматриваемым эндшпилем связан еще один, также первый в истории случай — когда ЭВМ оказало практическую помощь гроссмейстеру. Это произошло в 1975 г. на зональном турнире в Вильнюсе. Партия Григорян — Бронштейн была отложена в позиции, которая форсированно переходила в окончание с ферзем и пешкой у черных против ферзя противника. Гроссмейстеру было известно об успехах ЭВМ, и он обратился к ней за «консультацией». Незадолго до начала доигрывания Бронштейн получил бандероль с таблограммой, содержащей анализ позиции! Однако Григорян ошибся уже в начале доигрывания, и гроссмейстер победил без «подсказки» ЭВМ.

Само по себе это событие весьма примечательно, но возникает естественный вопрос: а правомерно ли шахматисту в официальных соревнованиях прибегать к услугам электронной машины? С одной стороны, в этом нет ничего предосудительного — разрешается же при домашнем анализе пользоваться помощью тренеров и заглядывать в шахматные книги. Однако здесь есть существенная разница — ведь к товарищам или шахматным справочникам может обратиться любой шахматист, а общение с машиной доступно далеко не каждому. Немного фантазии, и легко представить себе ситуацию, когда звание чемпиона мира среди людей зависит от... быстродействия ЭВМ в странах, представляемых участниками матча!

Впрочем, что касается теоретических позиций (в том числе тех, о которых шла речь), то не исключено, что со временем ЭВМ станет «публиковать» свои анализы этих позиций в печати, и тогда наш вопрос отпадет сам собой.

Раз уж мы упомянули имя Д. Бронштейна, то закончим рассказ о ферзевых окончаниях одной задачей на «подсчет», которую придумал гроссмейстер.

Рассмотрим эндшпиль «ферзь против пешки», в котором пешка находится на пороге превращения (на предпоследней горизонтали). Теория утверждает, что если пешка не ладейная и не слоновая, то сильнейшая сторона, как правило, выигрывает. Гроссмейстера как раз и интересовало: а сколько существует исключений из этого правила?

Очевидно, достаточно найти число позиций при черной пешке на b2 и d2, а затем умножить его на четыре (остальные позиции получаются заменой пешек b2 на g2, d2 на e2, а также перемены цвета). Оказывается, что все-

го существует  $50 \times 4 = 200$  (!) позиций, в которых ферзь не может справиться с пешкой. Самая любопытная позиция такова — белые: Kpd5, Фd8; черные: Kpd3, pd2. Грозит d2—d1Ф, причем у ферзя ни одного шаха нет, если же с шахом отступает белый король на линию с или е, то черный король идет соответственно на с2 или е2 — ч шахов больше нет.

## Глава 8

### ЗАДАЧА О ВОСЬМИ ФЕРЗЯХ

Задача о восьми ферзях, как и задача о ходе коня, является одной из самых знаменитых математических задач на шахматной доске. Если задачей о коне занимался Леонард Эйлер, то задача о ферзях привлекла внимание другого великого математика — Карла Гаусса.

*Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу, т. е. никакие два не стояли на одной вертикали, горизонтали и диагонали?*

Найти ту или иную расстановку ферзей, удовлетворяющую условию задачи, не так трудно (четыре решения приведены на рис. 43). Значительно труднее подсчитать общее число существующих расстановок; собственно, в этом и состоит задача о восьми ферзях. Ясно, что как и в случае ладей, больше восьми не атакующих друг друга ферзей на шахматной доске расставить невозможно. И, соответственно, на доске  $n \times n$  необходимым образом нельзя расставить более  $n$  ферзей (в общем виде задача будет рассмотрена несколько ниже).

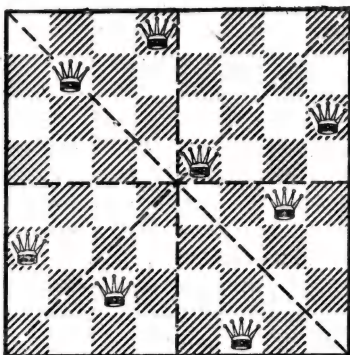
Любопытно, что многие авторы ошибочно приписывают задачу о восьми ферзях и ее решение самому Гауссу. На самом деле первым ее сформулировал в 1848 г. немецкий шахматист М. Беццель. Доктор Ф. Нәук (слепой от рождения) нашел 60 решений и опубликовал их в газете «Illustrierte Zeitung» от 1 июня 1850 г. Лишь после этого Гаусс увлекся задачей и нашел 72 решения, которые сообщил в письме к своему другу астроному Шумахеру от 2 сентября 1850 г. Полный же набор решений, состоящий

из 92 позиций, получил все тот же Ф. Наук (он привел их в упомянутой газете от 21 сентября 1850 г.). Эта хронология установлена известным немецким исследователем математических развлечений В. Аренсом, который в своих книгах немало места уделит рассматриваемой задаче.

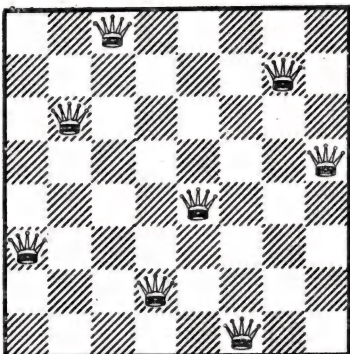
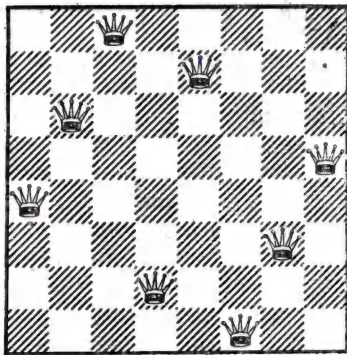
Доказательство того, что 92 решения исчерпывают все возможности, было получено лишь в 1874 г. английским математиком Д. Глэшером (при помощи теории определителей).

В принципе, расставляя на доске восемь ферзей всевозможными способами, мы в конце концов найдем все устраивающие нас расстановки. Однако этот путь чересчур долг и скучен. Можно ограничиться только решениями соответствующей задачи о ладьях и отобрать среди

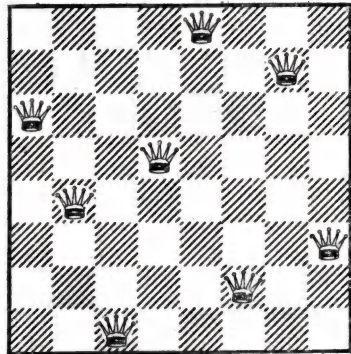
1



2



3



4

Рис. 43. Восемь ферзей, не угрожающих друг другу на шахматной доске



них такие, в которых никакая пара ладей не стоит на одной диагонали. Но и в этом случае перебор довольно велик (понадобятся, как мы знаем, более 40 000 попыток). Таким образом, при решении задачи «вручную» (а именно так поступали в прошлом веке) вынужденный перебор расстановок должен быть хорошо продуман. Известно много способов организовать более или менее разумный поиск искомых расположений ферзей (методы Пермантье, Ла-Ное, Гюнтера, Глэшера, Лакьера и др.). Эти способы описаны в многочисленной литературе по занимательной математике (в основном в прошлом столетии и начале нынешнего). В наш век вычислительных машин задача такого сорта не смогла бы вызвать столь живой интерес. Ведь достаточно составить несложную программу для ЭВМ — и уже через несколько минут после ее введения в машину все 92 необходимые позиции будут выданы на печать.

Из каждого решения задачи о ферзях можно получить ряд других при помощи поворотов (вращений) доски вокруг центра на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$  по часовой стрелке (поворот на  $360^\circ$  приводит к исходной позиции). Из данной расстановки ферзей новую можно получить также зеркальным отражением доски относительно одной из пунктирных прямых на рис. 43 (1-я позиция)<sup>35</sup>. Например, из первой расстановки на этом рисунке при повороте доски на  $90^\circ$  мы получаем третью, а при отражении относительно линии, разделяющей королевский и ферзевый флаги, — четвертую. При помощи других поворотов и отражений можно получить еще пять решений.

Итак, при поворотах и отражениях доски из одной расстановки ферзей получаются, вообще говоря, семь новых. Доказано, что в общем случае на доске  $n \times n$  (при  $n > 1$ ) для любой расстановки  $n$  ферзей, не угрожающих друг другу, возможны лишь три ситуации: а) при одном отражении доски получается новая расстановка, а повороты и другие отражения ничего нового не дают; б) новое решение получается при повороте доски на  $90^\circ$ , а отражения дают еще две расстановки; в) все три поворота и четыре отражения доски приводят к восьми несовпадающим расстановкам (включая исходную).

<sup>35</sup> Конечно, при поворотах и отражениях доски всегда предполагается, что система координат фиксирована. В противном случае при любых операциях с доской мы бы имели одно и то же решение.

В случае а) исходное решение называется дважды симметрическим, в случае б) — симметрическим, а в случае в) — простым. Для обычной доски каждое решение является либо простым, либо симметрическим, а дважды симметрических не существует. Алгебраическую интерпретацию решений каждого класса можно найти у Окунева.

Множество (набор) расстановок восьми ферзей называется основным, если они, во-первых, не переходят друг в друга при поворотах и отражениях доски, и, во-вторых, любая другая расстановка получается из какой-нибудь основной при помощи этих преобразований. Известно, что всякий набор основных решений задачи содержит ровно 12 позиций (расстановок восьми ферзей). Приведем один из таких наборов:

- 1) a4, b1, c5, d8, e6, f3, g7, h2;
- 2) a4, b2, c5, d8, e6, f1, g3, h7;
- 3) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g1, h5;
- 4) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g5, h1;
- 5) a3, b5, c2, d8, e6, f4, g7, h1;
- 6) a3, b7, c2, d8, e5, f1, g4, h6;
- 7) a4, b7, c3, d8, e2, f5, g1, h6;
- 8) a6, b4, c2, d8, e5, f7, g1, h3;
- 9) a4, b8, c1, d5, e7, f2, g6, h3;
- 10) a4, b2, c7, d5, e1, f8, g6, h3;
- 11) 1-я позиция на рис. 43;
- 12) 2-я позиция на рис. 43.

Остальные 80 позиций получаются из этих двенадцати в результате поворотов и отражений доски. Первые 11 расстановок являются простыми, и лишь последняя — симметрической. Таким образом, всего на доске существует  $11 \times 8 + 1 \times 4 = 92$  расстановки восьми ферзей, не угрожающих друг другу.

Рассматривая основные расстановки, можно обнаружить те или иные интересные особенности их. Например, легко заметить внешнюю симметрию последней расстановки (2-я позиция на рис. 43). Это основное решение, единственное в своем роде, характеризуется также тем, что только у него центральная часть доски (квадрат  $4 \times 4$ ) свободна от ферзей. Еще одно его свойство состоит в том, что ферзями не занята главная диагональ доски a1 — h8 (этим свойством обладает и первое основное решение).

Первая расстановка на рис. 43 любопытна тем, что здесь никакие три ферзя не стоят на одной прямой, проведенной через центры полей (имеются в виду не только вертикали, горизонталы и диагонали доски, но и прямые с другими углами наклона).

Всякое решение задачи можно записать, как набор  $(t_1, t_2, \dots, t_8)$ , представляющий собой перестановку чисел 1, 2, ..., 8. Здесь  $t_i$  — номер горизонтали, на которой стоит ферзь  $i$ -й вертикали. Так как никакие два ферзя не находятся на одной горизонтали, то все  $t_i$  различны, а поскольку ферзи не стоят и на одной диагонали, то для любых  $i, j$  ( $i < j \leq 8$ ) имеем:  $|t_j - t_i| \neq j - i$ .

Числовая запись расстановок ферзей иногда бывает очень удобной. Например, для нахождения расстановок при фиксированном расположении ферзя на a1 достаточно из всех 92 позиций, записанных в числовой форме, отобрать такие, у которых первая координата равна 1. Если фиксировано положение ферзя на d3, то следует выделить позиции, у которых на четвертом месте стоит число 3, и т. д.

Запишем числа 1, 2, ..., 8 сначала по возрастанию, а потом по убыванию. После этого сложим числа каждой из этих двух перестановок с числами произвольной перестановки, например (3, 7, 2, 8, 5, 1, 4, 6):

$  \begin{array}{cccccccc}  +1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\  3, & 7, & 2, & 8, & 5, & 1, & 4, & 6  \end{array}  $	$  \begin{array}{cccccccc}  +8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1 \\  3, & 7, & 2, & 8, & 5, & 1, & 4, & 6  \end{array}  $
4   9,   5, 12, 10,   7, 11, 14	11, 14, 8, 13, 9,   4,   6,   7

Полученные суммы образуют два набора чисел: (4, 9, 5, 12, 10, 7, 11, 14) и (11, 14, 8, 13, 9, 4, 6, 7). Возникает следующая задача.

*Какие перестановки чисел 1, 2, ..., 8 дают в результате указанной операции сложения два таких набора, в каждом из которых все числа различны?*

Задача о восьми ферзях заинтересовала Гаусса именно в связи с этой чисто арифметической задачей. Оказывается, между решениями задачи о ферзях и решениями описанной арифметической задачи существует взаимно однозначное соответствие. Другими словами, каждая расстановка восьми ферзей, не угрожающих друг другу, дает решение арифметической задачи — и наоборот. Для выбран-



ной перестановки оба набора состоят из различных чисел, и это не случайно — она соответствует первой позиции на рис. 43.

Нетрудно видеть, что при поворотах и отражениях доски одни решения получаются из других при помощи простых арифметических операций над координатами полей, занятых ферзями. Исследование этих операций позволяет обнаружить дополнительные свойства решений (некоторые из которых приведены у Окунева).

*Задача о  $n$  ферзях.* На шахматной доске  $n \times n$  расставить  $n$  ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу.

На доске  $1 \times 1$  один ферзь ставится на единственное поле, и решение существует. На доске  $2 \times 2$  один ферзь, где бы он ни стоял, угрожает всем полям доски, и второго ферзя поставить некуда. При любой расстановке трех ферзей на доске  $3 \times 3$  хотя бы два из них угрожают друг другу. Итак, при  $n$ , равном 2 или 3, задача не имеет решений.

Что касается случаев  $n > 3$ , то известно, что на любой доске  $n \times n$  можно расставить  $n$  ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу. Доказательству этого далеко не очевидного факта посвящено много статей, в том числе в серьезных математических изданиях.

На доске  $4 \times 4$  существует единственная основная расстановка, причем дважды симметрическая (a2, b4, c1, d3), т. е. всего здесь имеется два решения. На доске  $5 \times 5$  основных расстановок две: 1) a2, b4, c1, d3, e5; 2) a2, b5, c3, d1, e4; всего же имеется десять искомых позиций. Интересно, что из них можно выбрать пять таких, при наложении которых друг на друга 25 ферзей заполняют все поля доски  $5 \times 5$ . Аналогичное наложение в общем случае возможно только при тех  $n$ , которые не делятся ни на 2, ни на 3. Из этого, в частности, следует, что для обычной доски подобрать восемь решений, для которых ферзи заполняют всю доску, невозможно.

Обобщая указанное выше алгебраическое свойство решений задачи о восьми ферзях, получаем, что расстановка  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$   $n$  ферзей на доске  $n \times n$  является искомой, если для любых  $i, j$  ( $i < j < n$ ):  $|t_j - t_i| \neq j - i$ . Здесь по-прежнему  $t_i$  — номер горизонтали, на которой стоит ферзь  $i$ -й вертикали, а набор  $t_1, \dots, t_n$  есть перестановка чисел  $1, \dots, n$ . Таким образом, для решения задачи в общем случае достаточно найти перестановку чисел  $1, \dots, n$ , удовлетворяющую указанному условию.

Сейчас мы опишем одну возможную схему искомого расположения  $n$  ферзей на доске  $n \times n$  при всех  $n > 5$ . Доказательство того, что в полученных расстановках наше условие выполняется, можно найти, например, у Окунева или у Ягломов.

Рассмотрим последовательно ряд случаев. Пусть сначала  $n$  четно, причем  $n = 6k$  или  $n = 6k + 4$ . Половину всех ферзей поставим на первых  $n/2$  вертикалях ходом коня, начиная со второй горизонтали и передвигаясь каждый раз на 2 поля вверх и на 1 вправо. Вторую половину поставим на оставшихся  $n/2$  вертикалях тем же способом, но начиная с первой горизонтали. Для доски  $6 \times 6$  ( $n = 6k$ ,  $k = 1$ ) это дает такую расстановку ферзей: a2, b4, c6, d1, e3, f5 (решение, представленное на рис. 45 для  $n = 10$ , получается иным образом).

При  $n = 6k + 2$  предыдущий прием уже не проходит, и ферзей приходится расставлять более «хитрым» способом. Расположим их ходом коня со второй вертикали по  $\left(\frac{n}{2} - 2\right)$ -ю, начиная с третьей горизонтали, и далее с  $\left(\frac{n}{2} + 3\right)$ -й вертикали по  $(n - 1)$ -ю, начиная с шестой горизонтали. В результате свободными останутся шесть вертикалей и шесть горизонталей доски, на которых шесть ферзей должны занять поля с такими координатами:  $(1, n - 3)$ ,  $(n/2 - 1, 1)$ ;  $(n/2, n - 1)$ ,  $(n/2 + 1, 2)$ ,  $(n/2 + 2, n)$ ,  $(n, 4)$ . При  $n = 14$  ( $n = 6k + 2$ ,  $k = 2$ ) получаем расстановку на рис. 44. Кстати, на обычной доске  $8 \times 8$  ( $8 = 6k + 2$ ,  $k = 1$ ) расстановка восьми ферзей указанным способом совпадает все с тем же замечательным решением на рис. 43 (2-я позиция), но заметить закономерность расположения ферзей здесь вряд ли возможно.

Нам осталось рассмотреть задачу для нечетных значений  $n$ . Чтобы получить решение в этом случае, достаточно заметить, что в предложенных нами расстановках на «четных» досках главная диагональ (идущая из левого нижнего угла в правый верхний) оставалась свободной. Учитывая это обстоятельство, искомую расстановку  $n$  ферзей на доске  $n \times n$  (при нечетном  $n$ ) можно получить следующим образом. На вертикалях и горизонталях этой доски с номерами от 1 до  $(n - 1)$  расставим  $(n - 1)$  ферзя так, как это делается на доске  $(n - 1) \times (n - 1)$  ( $n - 1$  четно!), а затем  $n$ -го ферзя расположим в правом верхнем углу дос-

ки. Описанным способом можно получить первую расстановку ферзей на доске  $5 \times 5$  (см. стр. 96) из указанной расстановки на доске  $4 \times 4$ , а из расстановки ферзей на доске  $6 \times 6$  имеем следующую для  $n = 7$ : a2, b4, c6, d1, e3, f5, g7.

Таблица 1

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число решений	1	—	—	2	10	4	40	92	352	724	2680	14 200

В табл. 1 указано общее число решений задачи об  $n$  ферзях для досок  $n \times n$  при  $n$  от 1 до 12. Нахождение общей формулы для числа расстановок  $n$  ферзей, не угрожающих друг другу на доске  $n \times n$ , представляет собой весьма сложную проблему.

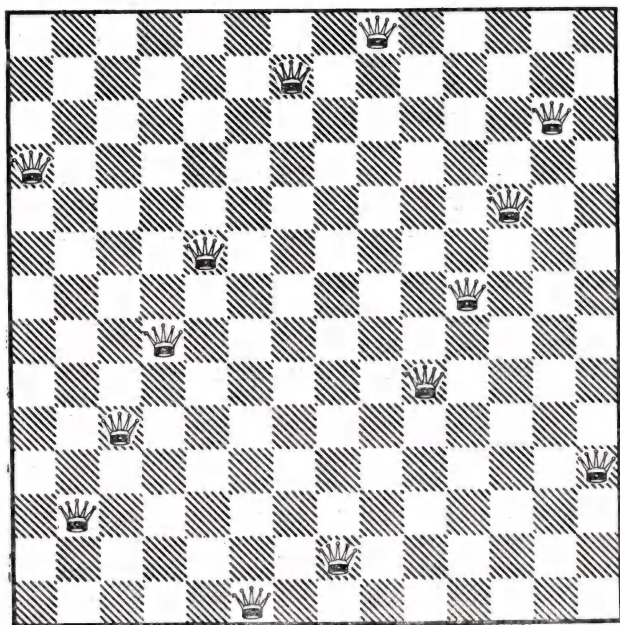


Рис. 44. Задача об  $n$  ферзях



Ферзь, как мы знаем, сочетает в себе ходы ладьи и слона. Фигуру, которая ходит одновременно как ладья, слон и конь, шахматные композиторы называют магараджей или амазонкой. Как обстоит дело с расстановкой на доске  $8 \times 8$  восьми таких сверхферзей?

Оказывается, что восемь магарадж, не атакующих друг друга, расставить на доске  $8 \times 8$  невозможно. Проанализировав все 12 приведенных выше основных расстановок, мы легко убедимся, что всякий раз по меньшей мере три пары ферзей связаны между собой ходом коня. На доске  $9 \times 9$  девять наших мощных фигур также не мо-

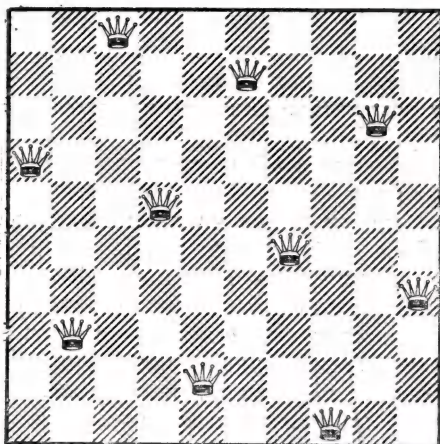


Рис. 45. Десять ферзей-магарадж, не угрожающих друг другу на доске  $10 \times 10$

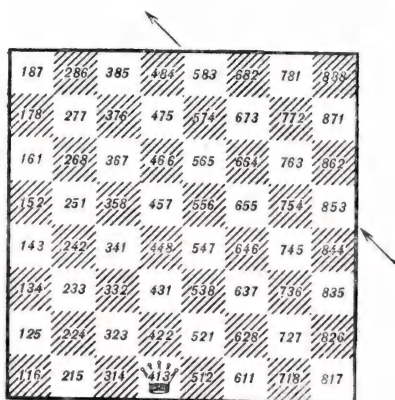


Рис. 46. Задача о восьми ферзях на цилиндрической доске

гут находиться в безопасности. И лишь на доске  $10 \times 10$  можно расставить десять «мирных» магарадж. При этом имеется всего одно основное решение, показанное на рис. 45, где ферзи играют роль магарадж.

Склеивая друг с другом вертикальные или горизонтальные края доски, мы получаем цилиндрическую шахматную доску. Ниже мы еще вернемся к цилиндрическим шахматам, а сейчас рассмотрим одну «цилиндрическую» задачу, естественно обобщающую задачу о восьми ферзях.

*Можно ли на цилиндрической шахматной доске расставить восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу?*

Оказывается, что если на обычной доске имеется 92 искомые расстановки, то на цилиндрической уже нет ни одной! Докажем это, считая, что такая доска получается в результате склеивания вертикальных краев (см. рис. 68а, стр. 154).

Возьмем обычную шахматную доску, помня о том, что ее края склеены. Это означает, в частности, что ферзь с d1 может пойти на a4 и далее, не останавливаясь, через h5 на e8 (этот путь показан стрелкой на рис. 46), и, значит, поля d1 — a4 и h5 — e8 составляют одну диагональ. Запишем на каждом поле доски три цифры, совпадающие, соответственно, с номерами вертикали, горизонтали и диагонали, проходящих через это поле. Рассматриваются диагонали, параллельные стрелкам на рис. 46, здесь же показана выбранная нами нумерация диагоналей.

Если восемь ферзей не угрожают друг другу, то на восьми полях, занимаемых ими, все первые цифры различны и, значит, образуют полный набор чисел 1, 2, . . . . . , 8. То же утверждение справедливо для вторых и для третьих цифр. Итак, сумма всех 24 цифр, стоящих на полях с ферзями, равна  $(1 + \dots + 8) \times 3 = 108$ . Так как сумма цифр каждого поля делится на 8, то и найденная сумма должна делиться на 8, однако 108 на 8 не делится — противоречие!

## НЕЗАВИСИМОСТЬ И ДОМИНИРОВАНИЕ ШАХМАТНЫХ ФИГУР

Множество очень интересных и красивых задач на шахматной доске возникает при решении двух следующих комбинаторных проблем.

1. *Какое максимальное число одноименных фигур (ферзей, ладей, слонов, коней или королей) можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие две из них не угрожали друг другу?*

2. *Какое минимальное число одноименных фигур (ферзей, ладей, слонов, коней или королей) можно расставить на шахматной доске так, чтобы они держали под обстрелом все свободные поля доски?*

Первое из этих чисел мы будем называть числом независимости для соответствующих фигур, а второе — числом доминирования. Для единства терминологии фигуры, которые не угрожают друг другу, будем называть независимыми, а фигуры, обстреливающие все свободные поля доски (доминирующие на доске), — доминирующими.

Здесь мы имеем явную аналогию с рядом важных задач из теории графов. Чтобы убедиться в этом, приведем следующие определения. Множество вершин графа называется независимым, если никакие две из них не соединены между собой ребром. Среди независимых множеств существует хотя бы одно «максимально независимое», содержащее максимальное число вершин. Это число называется числом независимости для данного графа (или числом его внешней устойчивости).

Множество вершин графа называется доминирующим, если каждая вершина вне этого множества соединена ребром хотя бы с одной вершиной, принадлежащей ему. Среди доминирующих множеств существует хотя бы одно «минимально доминирующее», содержащее минимальное число вершин. Это число называется числом доминирования для данного графа (или числом его внутренней устойчивости)<sup>36</sup>.

<sup>36</sup> Более подробно с приведенными понятиями можно ознакомиться в книге К. Бержа (см. сноску 19 на стр. 47), а также в книге О. Оре «Теория графов» (М., «Наука», 1968).



Каждой шахматной фигуре можно поставить в соответствие граф, вершины которого расположены на всех 64 полях доски, а ребра соответствуют ходам этой фигуры. Иначе говоря, если фигура в состоянии сделать ход между двумя данными полями, то расположенные в них вершины соединены ребром (аналогично был введен граф при рассмотрении задачи о коне Аттилы). Теперь легко убедиться в том, что наша первая проблема заключается в определении числа независимости для графа данной фигуры, а вторая проблема — в определении числа доминирования.

Установленная связь между чисто математическими объектами — графами и задачами о шахматных фигурах, как мы видели, довольно естественна, чем и объясняется большая популярность шахматных терминов и задач в литературе по теории графов. Многие задачи о графах, весьма сложные в общем случае, удается решить для графов шахматных фигур. Именно так обстоит дело и с задачами о независимости и доминировании на шахматной доске. Ниже мы найдем числа независимости и доминирования для графов всех шахматных фигур и, следовательно, разрешим для них обе наши проблемы. Попутно нами будут рассмотрены вопросы о подсчете числа «оптимальных» расстановок фигур, а также различные обобщения для досок  $n \times n$ . Для удобства через  $N$  будем обозначать число независимости, а через  $D$  — число доминирования, индекс у этих букв указывает размер доски; так,  $D_n$  (Л) — число доминирования для ладей на доске  $n \times n$ . Результаты наших исследований мы будем заносить в табл. 2 (см. стр. 107), знаки вопроса означают, что соответствующие числа неизвестны (по крайней мере, автору). После каждой строки с числами  $N$  и  $D$  в таблице идет строка с числом «оптимальных» расстановок на доске — т. е. расстановок, в которых участвуют, соответственно,  $N$  или  $D$  указанных фигур.

Остановимся теперь на каждой из шахматных фигур в отдельности.

**1. Ферзь.** Число независимости для ферзей на любой доске  $n \times n$  найдено в предыдущей главе, имеем  $N_2$  (Ф) = 1,  $N_3$  (Ф) = 2,  $N_n$  (Ф) =  $n$  ( $n \neq 2, 3$ ). Формула для числа соответствующих расстановок в общем случае не известна. На обычной доске, как мы знаем, можно расставить восемь независимых ферзей (рис. 43), причем существуют 92 различные расстановки.

Число доминирования для ферзей на обычной доске, как, впрочем, и на досках  $9 \times 9$ ,  $10 \times 10$  и  $11 \times 11$  (рис. 35, 39), равно пяти. Существует 4860 способов для расстановки пяти «ферзей-часовых» на доске  $8 \times 8$ . Как уже говорилось, в общем случае формулу для  $D_n$  (Ф) никому найти не удалось (тем более неизвестно и число решений).

**2. Ладья.** Для ладьи все результаты получены в главе 6. Как мы знаем,  $N_n$  (Л) =  $D_n$  (Л) =  $n$ , а число расстановок соответственно равно  $n!$  и  $2n^n - n!$ . На обычной доске имеется  $8!$  расстановок восьми независимых ладей и  $2 \times 8^8 - 8!$  расстановок восьми доминирующих ладей.

**3. Конь.** На обычной доске успешно доминируют 12 коней (рис. 47); что касается доминирования на доске  $n \times n$ , то здесь вопрос остается открытым. Гарднер приводит числа  $D_n$  (К) для всех  $n \leq 10$ .

Про независимость коней известно гораздо больше. Очевидно, что на обычной доске можно расположить 32 независимых коня, достаточно поставить их на все белые или на все черные поля. Кстати, никаких других фигур, не угрожающих друг другу, в таком количестве расставить на доске невозможно, и поэтому коней можно по праву считать самыми мирными жителями шахматной семьи. Больше 32 независимых коней на шахматной доске расставить не удастся. Докажем это двумя различными способами.

а. Разобьем доску на восемь конгруэнтных прямоугольников (рис. 48) и рассмотрим один из них. Конь, стоящий в данном прямоугольнике, держит под обстрелом ровно одно его поле; при этом, куда бы мы ни поставили двух коней, поля прямоугольника, на которые они нападают, различны. Поскольку каждый прямоугольник состоит из восьми полей, то внутри него можно разместить не более четырех коней, не угрожающих друг другу, а значит — общее число коней не превосходит  $4 \times 8 = 32$ .

б. Непосредственное доказательство того, что максимальное число «мирных» коней равно 32, следует из существования замкнутого маршрута коня. Действительно, в таком маршруте после каждого поля, занятого конем, должно следовать свободное поле, а поскольку маршрут охватывает всю доску, то более половины ее полей не могут быть заняты конями.

Доказательство, аналогичное а), показывает, что

$N_n(K) = n^2/2$ , если  $n$  четно, и  $N_n(K) = \frac{n^2+1}{2}$ , если  $n$  нечетно. В первом случае существуют только две необходимые расстановки, а во втором — всего одна (кони должны стоять на полях того цвета, которого на доске больше). То, что иных расстановок не существует, доказано у Ягломов.

С математической точки зрения король и слон не так интересны, как другие шахматные фигуры, и поэтому в настоящей книге им уделено меньше внимания. Сейчас мы найдем для этих фигур числа независимости и доминирования.

**4. Слон.** Для нахождения числа независимости рассмотрим на шахматной доске пятнадцать диагоналей, показанных на рис. 49. Если никакие два слона не угрожа-

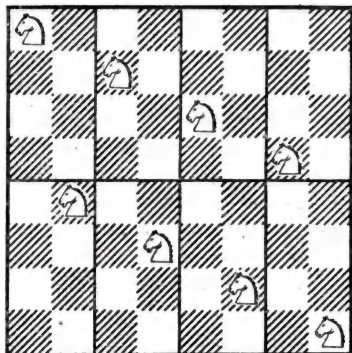
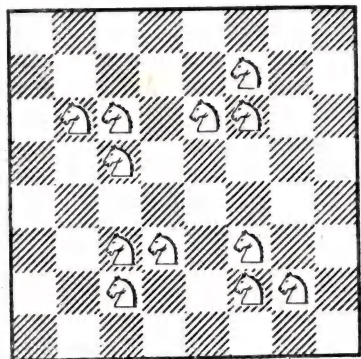


Рис. 47. Двенадцать коней, доминирующих на шахматной доске

Рис. 48. Задача о мирных конях

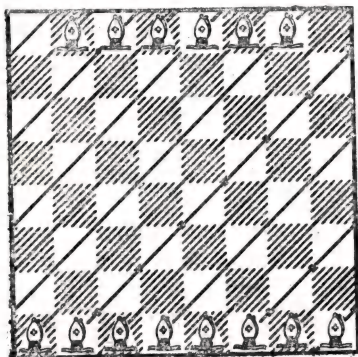


Рис. 49. Четырнадцать слонов, не угрожающих друг другу



ют друг другу, то на каждой из этих диагоналей может стоять не более одного слона. Поскольку диагонали покрывают все поля доски, общее число независимых слонов не превосходит пятнадцати. Однако ровно столько слонов тоже не удастся поставить, так как крайние из наших диагоналей состоят из одного поля, причем оба эти поля расположены на одной диагонали  $a8 - h1$ . Расстановка на рис. 49 показывает, что  $N_8(C) = 14$ . Совершенно аналогично получаем  $N_n(C) = 2n - 2$ . При этом можно показать, что при  $n > 1$  на доске  $n \times n$  существует  $2^n$  необходимых расстановок (в каждой из них все слоны расположены на крайних линиях). Соответствующие доказательства можно найти в книге Ягломов.

Восемь «слонов-часовых» вполне в состоянии справиться с шахматной «тюрьмой» (рис. 50). Покажем, что меньшее число слонов доминировать на доске не может. Пусть на ней стоит меньше четырех белопольных слонов. Тогда не меньше пяти белых диагоналей (из восьми отмеченных на рисунке) свободны от слонов, причем хотя бы одна из них содержит больше трех полей. Так как ни один из выбранных слонов не может угрожать более чем одному полю такой диагонали (на ней самой слонов нет), то все ее поля не могут одновременно находиться под угрозой — противоречие. Итак, на доске должно стоять не меньше четырех белопольных слонов. Точно так же получаем, что на ней должно стоять и не меньше четырех чернопольных слонов, т. е. общее число слонов не меньше восьми,  $D_8(C) = 8$ .

Аналогично получаем  $D_n(C) = n$ . Число способов доминирования восьми слонов на шахматной доске равно 20 736; для доски  $n \times n$  формула имеет довольно сложный вид, ее вывод приведен у Ягломов.

**5. Король.** Для определения числа независимости для королей разобьем шахматную доску на 16 квадратов (рис. 51). При расстановке королей, не угрожающих друг другу, т. е. не стоящих рядом, в каждом из этих квадратов может находиться не более одного короля. Это означает, что больше 16 независимых королей расставить невозможно, а ровно столько стоит на рис. 51. Совершенно аналогично показывается, что на доске  $n \times n$  можно расставить  $(n/2)^2$  независимых королей при четных  $n$  и  $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$  — при нечетных  $n$ . На обычной доске существует 281571 расстановок; формулы для доски  $n \times n$  имеются у Фабеля.

Теперь найдем число  $D_8(Kp)$ . В каждом из девяти прямоугольников, выделенных на рис. 52 (четыре из них квадраты), имеется поле (на нем стоит король), которое может быть атаковано только королем, находящимся в этом же прямоугольнике. Следовательно, для того чтобы все свободные поля находились под угрозой, в каждом из наших девяти прямоугольников должен стоять хотя бы один король, и  $D_8(Kp) = 9$ .

Для доски  $n \times n$  последняя задача также решается разбиением всей доски на квадраты  $3 \times 3$  и прямоугольники, состоящие из остальных полей. Для различных  $n$  получаются несколько отличные формулы, все зависит от остатка, который получается при делении  $n$  на 3. Число расстановок доминирующих королей неизвестно.

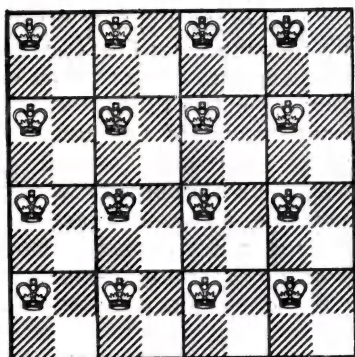
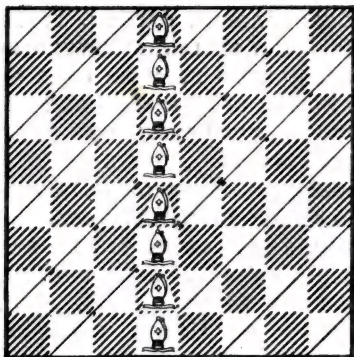
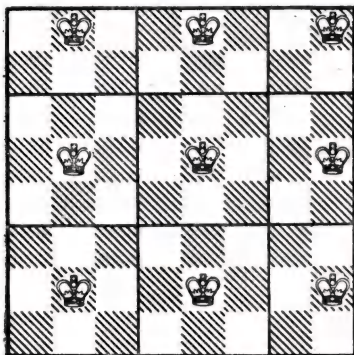


Рис. 50. Восемь слонов, доминирующих на шахматной доске

Рис. 51. Шестнадцать независимых королей на шахматной доске



←  
Рис. 52. Восемь королей, доминирующих на шахматной доске

Таблица 2

$N, D$	Ферзь	Ладья	Конь	Слон	Король
Число независимости для доски $8 \times 8$ ( $N_8$ )	8	8	32	14	16
Число расстановок	92	40320	2	256	281571
Число независимости для доски $n \times n$ ( $N_n$ )	1, если $n=1$ или $n=2$ , 2, если $n=3$ , $n$ , если $n > 3$	$n$	$\frac{n^2}{2}$ , если $n$ четно, $\frac{n^2+1}{2}$ , если $n$ нечетно	$2n-2$	$\left(\frac{n}{2}\right)^2$ , если $n$ четно, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ , если $n$ нечетно
Число расстановок	?	$n!$	2, если $n$ четно, 1, если $n$ нечетно	1, если $n=1$ , $2^n$ , если $n > 1$	см. у Фабеля
Число доминирования для доски $8 \times 8$ ( $D_8$ )	5	8	12	8	9
Число расстановок	4860	$2 \times 8^8 - 8!$	?	20736	?
Число доминирования для доски $n \times n$ ( $D_n$ )	?	$n$	?	$n$	$\left(\frac{n}{3}\right)^2$ , если $n=3k$ ; $\left(\frac{n+1}{3}\right)^2$ , если $n=3k-1$ ; $\left(\frac{n+2}{3}\right)^2$ , если $n=3k-2$
Число расстановок	?	$2n^n - n!$	?	см. у Ягломов	?



Итак, насколько смогли, мы заполнили табл. 2. При этом числа независимости и доминирования на обычной доске найдены для всех фигур. Таким образом, решены обе проблемы (для  $n = 8$ ), сформулированные в начале главы. Мы нашли также все числа расстановок независимых фигур на доске  $8 \times 8$ ; что же касается доминирования, то здесь еще осталось два нерешенных вопроса.

Уникальной является позиция Дьюдени на рис. 53. Здесь одновременно уместились 8 ферзей, 8 ладей и 14 слонов, причем все одноименные фигуры независимы! На доске находится также 21 «мирный» конь, и еще для

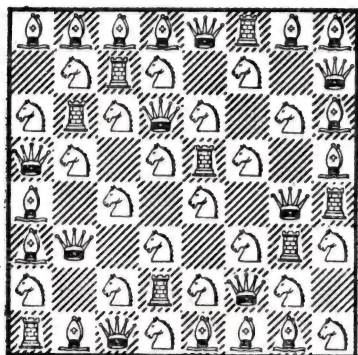


Рис. 53. На шахматной доске 8 независимых ферзей, 8 ладей, 14 слонов и 21 конь

одного «рекорда» не хватило 11 белых полей, которые, к сожалению, уже заняты.

Если разрешить пешкам стоять на первой и последней горизонталях, то обе наши проблемы станут корректными и для них. Нетрудно проверить, что в этом случае  $N_8(p) = 32$ ; пешками следует заполнить любые четыре вертикали, лишь бы они не были соседними. Имеем также  $D_8(p) = 29$  — достаточно занять пешками первую горизонталь и вертикали a, d и g.

До сих пор мы рассматривали лишь классические комбинаторные задачи о расстановке фигур. Однако существует множество самых разнообразных и необычных задач такого типа.

Например, если говорить о независимости, то весьма сложными являются задачи о расстановках за-

данного числа фигур, не обязательно равного  $N$ . Вот общая формулировка таких задач.

*Сколькими различными способами можно расставить на шахматной доске  $n \times n$   $r$  независимых фигур (ферзей, ладей, слонов, коней или королей)?*

Решения некоторых задач такого типа (для различных фигур и различных значений  $n$  и  $r$ ) можно найти у Фабеля и Петровича. Наиболее просто они, как обычно, решаются для ладей, а сложнее всего — для ферзей. Формула для двух независимых ферзей на доске  $n \times n$  будет получена в следующей главе; у Окунева она приведена также для  $r = 3$ , а для четырех ферзей решение еще неизвестно.

В задачах о доминировании можно требовать, чтобы фигуры держали под обстрелом не только свободные поля доски, но и занятые фигурами. Мы уже приводили расстановку пяти «ферзей-часовых», обладающих этим свойством. Восемь ладей, стоящих вдоль одной вертикали и горизонтали, также нападают на все поля доски. Что касается других фигур, то для того, чтобы они атаковали все поля доски, их требуется несколько больше, чем для обычного доминирования. Коней и слонов надо иметь на два больше, соответственно — 14 и 10, а королей — даже на три больше, т. е. только 12 королей в состоянии держать под обстрелом все поля доски. Соответствующие расстановки приведены на рис. 54. Так как поля первой горизонтали никогда не могут быть атакованы пешками, то для них наше задание невыполнимо.

Интересно исследовать также доминирование на шахматной доске различных наборов фигур, не обязательно одноименных. Как мы знаем, пять ферзей справляются с шахматной доской, но меньшим числом фигур обойтись не удастся. Любопытно, однако, что двух из пяти ферзей можно заменить более слабыми фигурами — двумя ладьями или даже ладьей и слоном (рис. 55), причем в первой расстановке атакованы все поля доски, включая занятые.

*Можно ли расставить на шахматной доске полный комплект фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона, два коня) так, чтобы они нападали на все 64 поля доски?*

Восемь шахматных фигур могут доминировать на всей доске, но, как это ни странно, лишь в том случае, если слоны одноцветные (рис. 56, а). Если же слоны разного цвета, то при любой расстановке фигур хотя бы одно поле доски не атаковано (на рис. 56, б безопасно поле c1).

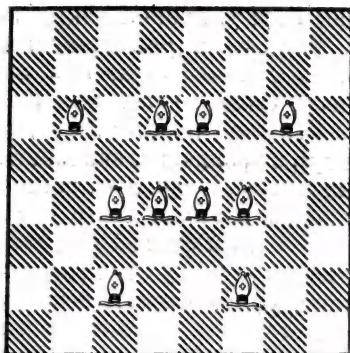
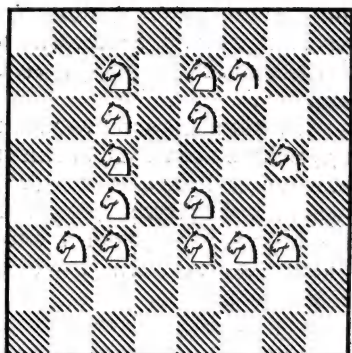


Рис. 54. Все поля доски под контролем 14 коней, 10 слонов, 12 королей

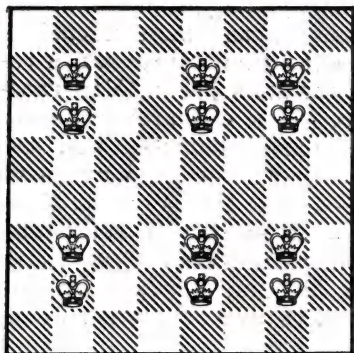
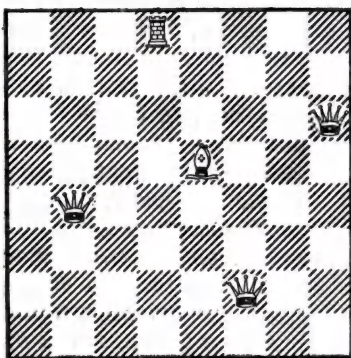
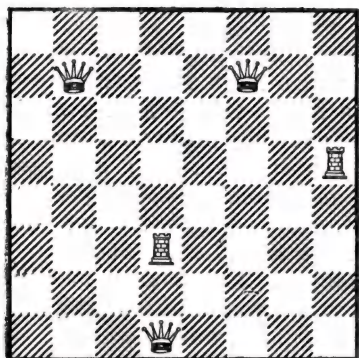


Рис. 55. Доминирование на шахматной доске минимального числа фигур





Прежде чем рассказать еще об одной задаче о расстановке шахматных фигур, дадим следующее определение из теории графов. Пусть каждой вершине графа приписан некоторый цвет. Тогда скажем, что граф раскрашен правильно, если любые две вершины, связанные одним ребром, имеют разный цвет. Минимальное число красок, которое требуется для правильной раскраски графа, называется хроматическим числом данного графа.

Нахождение хроматического числа (так же, как и чисел независимости и доминирования) — это не простая задача, а для некоторых классов графов представляет собой чрезвычайно сложную проблему. Достаточно упомя-

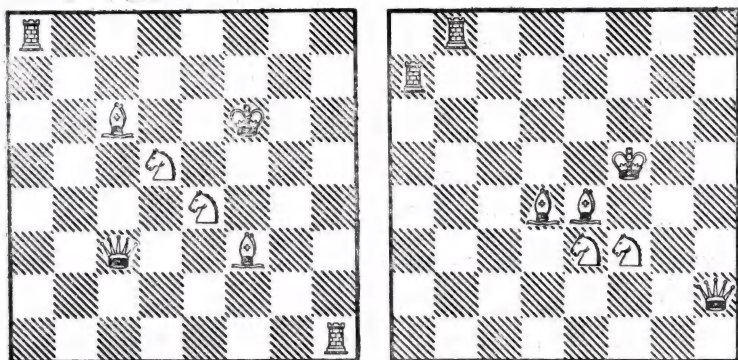


Рис. 56. Доминирование на шахматной доске восьми фигур:

а — слоны одноцветные — все поля под боем;

б — слоны разноцветные — поле c1 не атаковано

нуть знаменитую задачу четырех красок, которая сводится к определению хроматического числа в графе.

*Можно ли произвольную географическую карту раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две соседние страны были окрашены в разный цвет?*

Если в каждой стране поместить вершину графа и соединить ребрами все пары вершин, расположенные в соседних странах (они имеют общую границу), мы получим граф географической карты. Его хроматическое число совпадает с минимальным числом красок для раскраски карты. Гипотеза, по которой хроматическое число любого графа географической карты равно четырем, не под-

дается разрешению уже более ста лет, несмотря на усилия многих выдающихся математиков. Таким образом, на предложенный нами вопрос ответ до сих пор не найден. Известно лишь, что пятью красками можно обойтись всегда.

Что касается графов шахматных фигур, то здесь дело обстоит следующим образом. Для всех фигур, кроме ферзя, хроматические числа находятся без труда, а для ферзя еще не все ясно. Сформулируем теперь задачу о хроматическом числе в шахматных терминах.

*Какое минимальное число красок необходимо иметь для раскраски всех полей доски, если любые два поля, свя-*

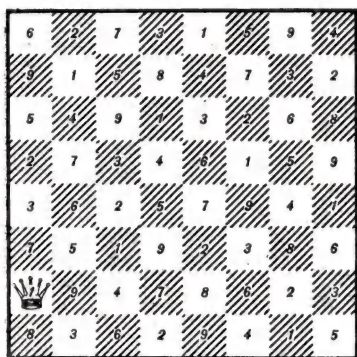


Рис. 57. Задача о раскраске доски

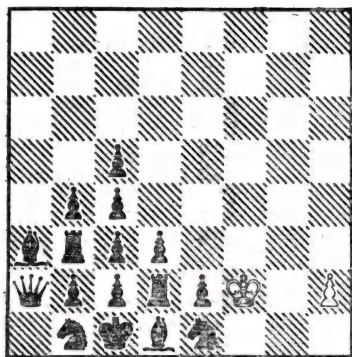


Рис. 58. Белые начинают и выигрывают

занные ходом данной фигуры (ферзя, ладьи, коня, слона или короля), должны быть окрашены в разные цвета?

Очевидно, при правильной раскраске доски фигуры, стоящие на полях одного цвета, не угрожают друг другу. Поскольку всего шахматных фигур — пять, то мы имеем здесь пять задач о раскраске доски. Меньше всего красок (две) требуется для коней. Собственно, здесь и раскрашивать ничего не надо, достаточно взять обычную шахматную черно-белую доску. Тех же двух красок хватает для раскраски любой доски  $n \times n$ , а при  $n$ , равном 1 или 2, можно ограничиться и одной краской.

В случае слонов и ладей для раскраски обычной доски достаточно восьми красок (а для раскраски доски  $n \times n$

достаточно  $n$  красок). На доске, заполненной слонами, каждую вертикаль можно окрасить в «свой» цвет. Для ладей все поля первой горизонтали нужно окрасить в разные цвета, а для раскраски последующих горизонталей использовать «циклический» сдвиг красок. Другими словами, если краски занумеровать числами от 1 до 8, то окраска первой горизонтали — 1, 2, . . . , 8; второй — 2, 3, . . . , 8, 1; третьей — 3, 4, . . . , 8, 1, 2 и т. д.; восьмой — 8, 7, . . . , 1.

Переходя к королям, заметим, что для них все четыре поля произвольного квадрата  $2 \times 2$  должны быть окрашены разными красками. Оказывается, четырех красок хватает и для любой доски  $n \times n$  (при  $n = 1$  — одна краска). Левый нижний квадрат  $2 \times 2$  можно произвольно раскрасить в четыре цвета, а затем так же раскрасить соседние квадраты  $2 \times 2$  и т. д., пока не будет раскрашена вся доска (если  $n^2$  не делится на 4, то, естественно, числа полей, окрашенных в разные цвета, могут несколько отличаться).

На рис. 57 показана раскраска шахматной доски для ферзей (числа от 1 до 9 соответствуют девяти краскам). Действительно, здесь никакие два одинаковых числа не стоят на одной вертикали, горизонтали и диагонали. Видимо, восьми красок для раскраски доски с ферзями не хватает, хотя точно это еще не установлено (следовало бы прибегнуть к помощи ЭВМ). В общем случае доказано <sup>37</sup>, что всегда можно раскрасить доску  $n \times n$  в  $n + 3$  цвета так, чтобы ферзи, стоящие на полях одного цвета, не угрожали друг другу. Для некоторых  $n$  достаточно и меньшего числа красок:  $n$ ,  $n + 1$  или  $n + 2$ . В указанной статье предложена также гипотеза, по которой хроматическое число графа ферзей при любом  $n > 3$  равно либо  $n$ , либо  $n + 1$ .

Отметим, в заключение, что во всех наших задачах о раскраске доски фигуры, поставленные на любые поля одного цвета, не угрожают друг другу и, значит, являются независимыми.

<sup>37</sup> M. Iyer, V. Menon. On Coloring the  $n \times n$  chessboard.— «American Math. Monthly», 1966, N 7.



## Глава 10

### СИЛА ШАХМАТНЫХ ФИГУР

Каждый шахматист знает, что сила фигуры — величина относительная и зависит от конкретной обстановки на доске. Легко придумать позицию, в которой одна пешка справляется со всей армией вражеских фигур. Рассмотрим один изящный пример на эту тему (рис. 58). На первый взгляд, король черных, которые имеют подавляющий материальный перевес (у них полный комплект фигур против короля и пешки белых!), надежно защищен, и все же белая пешка оказывается сильнее всей армии черных. . .

1. Kpf2:e1 Фа2—a1 (выбора нет) 2. h2—h3! Пешка продвигается всего на одно поле, хитрость обнаружится позднее. 2... Фа1—a2 3. h3—h4 Фа2—a1 4. h4—h5 Фа1—a2 5. h5—h6 Фа2—a1 6. h6—h7 Фа1—a2 7. h7—h8K!! Единственная белая пешка даже не превращается в ферзя. Теперь появившийся на доске конь проходит по маршруту Kh8—f7—e5—d7:c5—e4—d6:c4—a5 и, наконец, 16. Ka5:b3 мат! Мат возможен лишь потому, что черный ферзь в заключительный момент стоит на a1, т. е. на втором ходу белые выиграли важный темп. Здесь, кстати, мы вновь столкнулись со свойством коня-хамелеона.

И все же, несмотря на этот парадоксальный пример, совершенно очевидно, что в шахматах каждая фигура имеет некоторую среднюю силу. Даже начинающий шахматист быстро приходит к выводу, что ладья, как правило, сильнее легкой фигуры (качество!); конь и слон между собой примерно равны по силе, и каждый из них эквивалентен нескольким пешкам; ферзь превосходит любую фигуру, и т. д.

О силе фигур писали многие известные шахматисты, в том числе чемпионы мира Эм. Ласкер и Х. Р. Капабланка. В шахматных учебниках приводятся различные шкалы оценок для силы фигур. При этом за единицу обычно принимают силу пешки. В одних книгах предлагается такая шкала (через  $F(x)$  мы всюду обозначаем силу фигуры):

$$F(p) = 1, \quad F(K) = F(C) = 3, \quad F(J) = 5, \quad F(\Phi) = 9;$$

в других:

$$F(\Pi) = 1, \quad F(K) = 3, \quad F(C) = 3,5, \quad F(L) = 5,5, \\ F(\Phi) = 10$$

или

$$F(\Pi) = 1, \quad F(K) = F(C) = 3,5, \quad F(L) = 5,5, \quad F(\Phi) = 10.$$

Все эти шкалы в достаточной степени соответствуют нашему представлению о силе фигур. Так, например, из них следует, что ладья в среднем равносильна легкой фигуре и двум пешкам, ферзя можно разменять за две ладьи или ладью, легкую фигуру и пешку и т. д. Позиционные факторы здесь, конечно, не учитываются.

После того как шахматист приобретает некоторый навык игры, он уже не производит никаких математических расчетов за доской, а действует интуитивно. А вот кто совершенно не может играть в шахматы без шкалы ценностей, так это ЭВМ. Например, на первенстве мира среди ЭВМ программа «Каисса» пользовалась такой шкалой:  $F(\Pi) = 1, F(K) = F(C) = 3,5, F(L) = 5, F(\Phi) = 10$ .

Все приведенные шкалы устанавливаются эмпирически на основе опыта шахматистов. Сейчас мы рассмотрим один чисто математический способ определения силы фигур, связанный с особенностями их передвижения. Как мы ниже увидим, достоинство этого способа состоит в возможности разнообразных обобщений.

Начнем с короля. С каждого углового поля он может сделать по три хода, а с остальных полей крайних линий — по пять. Если же король не стоит на краю доски, то в его распоряжении имеется выбор из восьми ходов. Суммируя, получаем общее число возможных ходов короля на шахматной доске, которое обозначим через  $S(Kp)$ . Итак,

$$S(Kp) = 3 \times 4 + 5 \times 24 + 8 \times 36 = 420.$$

Аналогично находятся числа  $S(x)$  для других фигур:

$$S(\Phi) = 21 \times 28 + 23 \times 20 + 25 \times 12 + 27 \times 4 = \\ = 1456,$$

$$S(L) = 14 \times 64 = 896,$$

$$S(C) = 7 \times 28 + 9 \times 20 + 11 \times 12 + 13 \times 4 = \\ = 560,$$

$$S(K) = 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 20 + 6 \times 16 + 8 \times 16 = 336,$$

$$S(p) = 2 \times 10 + 3 \times 32 + 4 \times 6 = 140.$$

В вычислениях для простоты мы не учитывали рокировку (по два дополнительных хода короля и ладьи), а для пешки рассматривали также диагональные ходы, которые она делает при взятии. Записав на всех полях доски соответствующие числа, легко обнаружить, что максимальное число ходов ферзь и слон могут сделать с центрального квадрата  $6 \times 6$ , конь — с квадрата  $4 \times 4$ , а для ладьи все поля равноценны.

Обозначим через  $R(x)$  число полей, на которых может находиться фигура  $x$ . Разделив  $S(x)$  на  $R(x)$ , получим среднее число  $P(x)$  возможных ходов фигуры  $x$  с одного поля доски. Назовем это число подвижностью фигуры  $x$ :

$$P(x) = S(x)/R(x).$$

Очевидно, для всех фигур  $R(x) = 64$ , а для пешки  $R(p) = 48$  (она не может стоять на первой и последней горизонталях). По нашей формуле находим:  $P(\Phi) = 22,75$ ,  $P(J) = 14$ ,  $P(C) = 8,75$ ,  $P(Kp) = 6,5625$ ,  $P(K) = 5,25$ ,  $P(p) = 2,5$ .

Естественно считать, что сила фигуры прямо пропорциональна ее подвижности (это предположение вполне отражает действительную картину). Принимая силу пешки за единицу, силы остальных фигур определим по формуле

$$F(x) = P(x)/P(p).$$

В результате получаем следующую шкалу (значения округлены до десятых долей):  $F(p) = 1$ ,  $F(K) = 2,1$ ,  $F(Kp) = 2,6$ ,  $F(C) = 3,5$ ,  $F(J) = 5,6$ ,  $F(\Phi) = 9,1$ .

Заметим, что в наших предыдущих шкалах ничего не говорилось о короле. Конечно, король не подлежит размену, и его «потеря» невозместима. Кстати, для учета этого обстоятельства при программировании на ЭВМ в качестве силы короля обычно выбирается очень большое число, чем и подчеркивается его исключительность. Однако в смысле подвижности найденная оценка вполне разумна. Каждый шахматист знает, что в эндшпиле король часто не уступает легкой фигуре.



В нашей шкале легко обнаружить некоторые расхождения с практикой. Ее основной недостаток заключается в большем превосходстве дальнобойных фигур (ферзя, ладьи и слона) над конем, чем это есть на самом деле. Это можно объяснить тем, что в партии действия дальнобойных фигур (в отличие от коня) почти всегда ограничены другими фигурами, за счет чего их подвижность уменьшается. При желании последнее обстоятельство можно учесть, вводя поправочные коэффициенты. Другое уточнение можно внести, если использовать неравноценность полей шахматной доски (например, конь обычно стремится в центр — скажем, на поле е5 — и почти никогда не оказывается на h1, хотя эти поля в наших расчетах мы считали равновероятными), однако сейчас нас в основном интересует сама идея.

Указанный математический подход к оценке силы фигур позволяет рассматривать самые разнообразные задачи и обобщения. Пользуясь указанной выше формулой, найдем подвижности всех фигур  $P_n(x)$  на доске  $n \times n$ . Очевидно, для всех фигур  $R_n(x) = n^2$ , а для пешки  $R_n(n) = n(n-2)$ , т. е. нам достаточно найти суммарное число ходов  $S_n(x)$  фигуры  $x$  на доске  $n \times n$ .

Вывод необходимой формулы для короля аналогичен случаю  $n = 8$ . С четырех угловых полей он имеет по 3 хода, с остальных 4  $(n-2)$  полей крайних линий — по 5 и с  $(n-2)^2$  внутренних полей доски — по 8 ходов. Суммируя, находим

$$S_n(Kp) = 4(n-1)(2n-1).$$

Совсем просто получается формула для ладьи: на каждом из  $n^2$  полей она имеет в распоряжении  $2(n-1)$  ходов, и поэтому

$$S_n(L) = 2n^2(n-1).$$

Для коня и пешки имеем:

$$S_n(K) = 8(n-1)(n-2),$$

$$S_n(p) = (n-1)(3n-4).$$

Несколько сложнее вывод формулы для слона (ее можно найти у Окунева):

$$S_n(C) = \frac{2}{3}n(n-1)(2n-1).$$

Из того, что ферзь объединяет в себе ходы ладьи и слона, следует:

$$S_n(\Phi) = S_n(\Pi) + S_n(C) = \frac{2}{3} n (n-1) (5n-1).$$

Делением  $S_n(x)$  на  $P_n(x)$  находим подвижности всех шахматных фигур на доске  $n \times n$ :

$$P_n(Kp) = \frac{4(n-1)(2n-1)}{n^2},$$

$$P_n(\Phi) = \frac{2(n-1)(5n-1)}{3n},$$

$$P_n(\Pi) = 2(n-1),$$

$$P_n(C) = \frac{2(n-1)(2n-1)}{3n},$$

$$P_n(K) = \frac{8(n-1)(n-2)}{n^2},$$

$$P_n(\Pi) = \frac{(n-1)(3n-4)}{(n-2)}.$$

Очевидно, при  $n = 8$  из этих формул получаются найденные выше подвижности фигур на обычной доске. Для определения силы фигуры  $x$  на доске  $n \times n$  надо ее подвижность  $P_n(x)$  разделить на подвижность пешки  $P_n(\Pi)$ , но мы не станем производить этой простой операции. Заметим, что подвижности белопольного и чернопольного слонов (а значит, и их сила) совпадают только при четном  $n$ , в этом случае

$$P_n(C_6) = P_n(C_4) = \frac{P_n(C)}{2} = \frac{(n-1)(2n-1)}{3n}.$$

В случае же нечетного  $n$  число белых и черных полей доски отличается на единицу, и подвижности слонов не равны между собой. Предполагая, что черных полей на доске больше, получаем

$$P_n(C_4) = \frac{(n-1)(2n^2 - n + 3)}{3n^2},$$

$$P_n(C_6) = \frac{(n-1)(n+1)(2n-3)}{3n^2}.$$

Выясним, как меняется подвижность шахматных фигур при неограниченном увеличении размеров доски ( $n \rightarrow \infty$ ), т. е. на бесконечной шахматной доске. Под-

вижность фигуры  $x$  на такой доске обозначим через  $P_{\infty}(x)$ . Для нахождения подвижностей достаточно вычислить соответствующие пределы. Для фигур с ограниченным перемещением по доске (конь, король, пешка) получаем

$$P_{\infty}(Kp) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\infty}(Kp) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = 8,$$

$$P_{\infty}(K) = 8, \quad P_{\infty}(п) = 3.$$

Найденные числа можно было легко предугадать. Действительно, доля полей, с которых число возможных ходов короля, коня и пешки отличается от полученных значений, с ростом  $n$  стремится к нулю.

Движения ферзя, ладьи и слона носят линейный характер, и поэтому их подвижности и силы при  $n \rightarrow \infty$  неограниченно возрастают. При этом можно получить следующие приближенные формулы

$$P_n(\Phi) \approx \frac{10}{3} n, \quad P_n(Л) \approx 2n, \quad P_n(С) \approx \frac{4}{3} n.$$

Из них вытекает, что подвижности и силы дальнобойных фигур при больших значениях  $n$  находятся между собой приблизительно в следующем отношении:

$$P_n(\Phi) : P_n(Л) : P_n(С) = F_n(\Phi) : F_n(Л) : F_n(С) \approx 5 : 3 : 2.$$

Представьте себе, что вы играете в шахматы обычными фигурами, но на доске, имеющей большие размеры, например  $100 \times 100$ . Исходя из одной интуиции, вам будет поначалу довольно трудно сравнивать силы фигур на такой доске. Однако, пользуясь последней пропорцией (а число 100 достаточно велико), можно сделать определенные выводы. Например, из нее следует, что две ладьи на нашей доске заметно превосходят по силе ферзя, хотя на обычной доске это не так.

Еще более интересное обобщение заключается в рассмотрении различных «сказочных» фигур и их перемещений на тех или иных досках (о некоторых из таких фигур рассказывается в тринадцатой главе книги). Например, легко найти силу и подвижность магараджи (М), исходя из того, что  $S_n(M) = S_n(\Phi) + S_n(K)$ . Фабель приводит формулы для шахматных фигур с двойными и тройными ходами, а также для других необычных движений фигур.



Рассмотренный подход позволяет решать и обратные задачи, в которых требуется определить размер доски по заданным соотношениям между силой тех или иных фигур.

На обычной доске ладья по силе равна кентавру (эта фигура ходит одновременно, как слон и конь):  $14 = 8,75 + 5,25$ . Существуют ли другие доски, на которых ладья и кентавр имеют одинаковую силу?

Очевидно, для ответа на этот вопрос достаточно решить следующее уравнение:

$$P_n (Л) = P_n (С) + P_n (К).$$

Как нетрудно видеть, оно сводится к квадратному и имеет два корня:  $n = 3$  и  $n = 8$ . Таким образом, кроме обычной доски, ладья и кентавр равносильны на доске  $3 \times 3$ .

Аналогично, решая уравнение  $P_n (Кр) = P_n (С)$ , можно получить, что король и слон равносильны на доске  $6 \times 6$  (уравнение имеет один корень  $n = 6$ ).

Указанные формулы позволяют решать также задачи, которые, на первый взгляд, не имеют ничего общего с рассматриваемой темой.

Сколькими различными способами можно поставить на доске  $n \times n$  двух независимых (не угрожающих друг другу) ферзей?

Обозначим через  $t$  число поступательных ходов ферзя со всех полей доски  $n \times n$  (при таких ходах ферзь перемещается либо вправо, либо вверх, либо вправо и вверх одновременно). Ясно, что число расстановок двух ферзей, при которых они угрожают друг другу, также равно  $t$ . В то же время имеет место равенство  $S_n (\Phi) = 2t$ , так как число поступательных ходов равно числу возвратных, а те и другие вместе составляют все возможные ходы ферзя. Поскольку всего существует  $C_{n^2}^2$  различных расстановок двух ферзей на доске  $n \times n$ , то число искомых расстановок равно

$$C_{n^2}^2 - t = C_{n^2}^2 - \frac{S_n (\Phi)}{2} = \frac{n^2 (n^2 - 1)}{2} - \frac{(n-1)(5n-1)n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{6}.$$

Число расстановок двух независимых ладей, слонов и коней находится проще, однако при увеличении числа фи-

гур дело заметно усложняется. Некоторые комбинаторные задачи такого сорта можно найти в книге Виленкина. Последней из наших задач можно придать вероятностный характер.

*На два случайно выбранных поля доски  $n \times n$  ставятся ферзи. Какова вероятность того, что они не будут нападать друг на друга?*

Очевидно, искомая вероятность равна отношению числа расстановок двух независимых ферзей к общему числу расстановок:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{6C_2^{n^2}} = \frac{(n-2)(3n-1)}{3n(n+1)},$$

что для обычной доски дает приблизительно  $1/3$ .

В заключение этой главы рассмотрим еще одну вероятностную задачу (большое число их можно найти у Фабеля и Петровича).

*На три поля доски  $n \times n$  случайным образом ставят двух разнополюсных белых слонов и черного короля. При каких  $n$  вероятность того, что король окажется под шахом, равна  $1/2$ ?*

Пусть  $n$  четно. Тогда число возможных расположений трех наших фигур равно  $\frac{1}{2}n^2 \times \frac{1}{2}n^2(n^2-2)$ , а число расположений, при которых король стоит под шахом, равно  $\frac{1}{3}n^3(n-1)(2n-1)$ . Для вывода второй формулы достаточно заметить, что всякое расположение слона и короля, стоящего под его шахом, получается из расстановки двух не угрожающих друг другу слонов при замене одного из них королем. Приравнявая соответствующее отношение к  $1/2$ , находим необходимое уравнение относительно  $n$ . Оно имеет единственное решение  $n = 4$ , удовлетворяющее нас. Так как в аналогичном уравнении для нечетных  $n$  подходящих решений нет, то искомой является лишь доска  $4 \times 4$ .

## ПЕРЕСТАНОВочНЫЕ ЗАДАЧИ

Любая шахматная задача связана с какими-нибудь перестановками фигур на доске. Однако к перестановочным, или пермутационным, относят обычно такие задачи на перестановку фигур, задания в которых далеки от обычных. Вот типичный пример задачи с «нешахматным» заданием.

*Задача Доусона.* У белых лишь король на e1 и пешка на d2; у черных же на доске полный комплект фигур, все они находятся на своих первоначальных местах. Черным разрешается ходить только в том случае, если они дадут своим ходом шах. Учитывая это, белые должны заставить черных дать мат их королю.

Конечно, эту задачу Доусона на обратный мат нельзя считать настоящей шахматной задачей, так как правила игры здесь сильно нарушены. Для того чтобы добиться своей цели, белый король должен весьма умело перемещаться по доске, вызывая огонь на себя. Он получает мат лишь на 33-м (!) ходу после следующих перемещений:

1—4. Kpe1—d1—c2—b3—a4. Теперь черные впервые получают возможность сделать ход (дать шах). 4... b7—b5+ 5—6. Кра4—b3—c3 b5—b4+ 7. Kpc3—d3 Ce8—a6+ 8. Kpd3—e3 9. d2—d3 (единственный раз в «партии» ход делает белая пешка) 10—13. Kpe3—d2—c1—b2—b3 Ca6—c4+ 14—20. Kpb3—b2—c1—d2—e3—f2—g3—h3 Cc4—e6+ 21. Kph3—h4 g7—g5+ 22—24. Kph4—g3—h2—h1 Ce6—d5+ 25—26. Kph1—g1—f1 Cd5—g2+ 27—29. Kpf1—e1—d2—c2 b4—b3+ 30. Kpc2—b2 Cf8—g7+ 31. Kpb2—a3 Cg7—b2+ 32. Кра3—a4 Cg2—c6+ 33. Кра4—a5 Cb2—c3 мат!

У Фабеля приводится ряд пермутационных задач на подсчет последовательностей ходов (заданной длины), приводящих одну шахматную позицию к другой. Хотя искомым перестановкам ходов может существовать очень много, нахождение каждой из них не представляет труда. Однако, на наш взгляд, более интересны пермутационные задачи, в которых нелегко найти даже одну необходимую перестановку. В этих задачах доска часто имеет причудливую форму, и фигурам на ней очень тесно... Прежде чем перейти к таким задачам, вспомним класси-



ческую перестановочную игру-головоломку С. Лойда «Пятнанадцать».

В коробочке  $4 \times 4$  находятся пятнадцать квадратов, занумерованных числами от 1 до 15. Не вынимая квадраты из коробочки, переставить их так, чтобы номера были расположены в возрастающем порядке: 1, 2, . . . , 15, а пустым был правый нижний угол коробочки.

Пусть начальное расположение квадратов таково: 1, 2, . . . , 13, 15, 14, т. е. от искомого оно отличается перестановкой двух последних квадратов. За решение головоломки при такой начальной «позиции» Лойд назначил премию в 1000 долларов. Правда, он ничем не рисковал, так как доказал, что задание невыполнимо. Вообще говоря, существует  $16!$  расположений квадратов, и все они распадаются на два равных по численности класса. Расположения первого класса при помощи перестановок квадратов приводятся к искомому виду, а расположения второго класса удастся привести только к «позиции» с переставленными квадратами 14 и 15.

Говорят, что в некотором расположении два квадрата образуют транспозицию, если квадрат с бóльшим номером предшествует квадрату с меньшим. Для того чтобы определить, к какому именно виду приводится данное расположение, надо подсчитать число транспозиций в нем. Если это число четно (в частности, ноль), то расположение относится к первому классу и перестановками приводится к «нормальному» виду. Если же число транспозиций нечетно, то положение относится ко второму классу. Подробный анализ игры не входит в наши планы<sup>38</sup>, ее упоминание здесь объясняется лишь аналогией этой головоломки с некоторыми перестановочными задачами на шахматной доске.

*На доске  $4 \times 4$  расставлены 15 ладей, занумерованных числами от 1 до 15. Переставить лады так, чтобы их номера расположились в возрастающем порядке, а пустым было поле в правом нижнем углу доски.*

Так как ход лады на нашей доске совпадает с перестановкой квадрата в игре «Пятнанадцать», то данная задача

<sup>38</sup> Исследованию игры «Пятнанадцать» посвящена обширная литература. Из книг по занимательной математике укажем следующую: А. Доморяд. Математические игры и развлечения. М., Физматгиз, 1961. Заслуживает внимания также статья О. Долгова «Игра в 15» («Квант», 1974, № 2).

фактически сводится к ней. Другими словами, существование решения зависит от числа транспозиций ладей в исходной расстановке.

Задача с ладьями легко обобщается и для доски  $8 \times 8$ . Можно показать, что все позиции с 63 ладьями, занумерованными числами от 1 до 63, распадаются на два класса: в половине из  $64!$  позиций ладья удастся расположить в возрастающем порядке (с пустым полем h1), а в половине — нет. Любопытно, что для коней имеет место та же самая ситуация, что и для ладей. Все позиции с 63 занумерованными конями также распадаются на два равных по численности класса <sup>39</sup>.

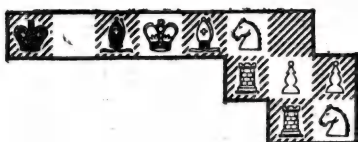


Рис. 59. «Пистолет» Т. Доусона. Белые начинают и дают мат в 21 ход

Для ферзей и королей задача имеет решение уже при любой начальной позиции, так как эти фигуры ходят не только по прямой (как ладья), но и по диагонали. А для слонов задача вообще не интересна, поскольку они не могут менять своего цвета.

Перейдем теперь к рассмотрению других пермутационных задач. В «позиции» на рис. 59 фигуры ходят по обычным правилам, но доска имеет весьма оригинальную форму. Белым на доске-«пистолете» очень тесно, этим и объясняется затянутость решения — 21 ход! Перечислим белые фигуры в том порядке, в каком они делают ходы (в распоряжении черного короля лишь два соседних поля, на которых он и ждет своей участи): К, Л, К, Л, С, Л, К, Л, К, С, К, Л, К, Л, Кр, К, Кр, Л, Кр, К, Л : С мат.

На рис. 60, а — в изображены знаменитые зигзаги немецкого шахматного композитора В. Шинкмана. Конечно, во всех трех задачах цель должна быть достигнута кратчайшим путем. Первая перестановка осуществляется за 26 ходов, а для второй требуется на один ход больше. Третья же задача представляет собой настоящий

<sup>39</sup> Подробное решение этих задач можно найти в кн.: Г. Ковалевский. Избранные главы из математической теории игр. М., 1924. Здесь содержится также фундаментальное исследование игры «Пятнадцать» и ее различных обобщений.

пермутационный рекорд! Здесь для перестановки короля и ферзя (остальные фигуры должны вернуться на исходные места) приходится совершить 107 (!! ) перемещений. Приведем решения двух первых зигзагов, а перестановку в последней марафонской задаче предлагаем наиболее терпеливым читателям провести самостоятельно.

1) С, Ф, Кр, С, Л, Ф, С, Л, С, Кр, С, Ф, Кр, С, Л, Ф, Л, С, Л, С, Л, С, Кр, С, Ф, Кр; 2) С, Л, Кр, С, Лс2—с1 (здесь мы пользуемся полной шахматной нотацией, чтобы указать, какая именно ладья идет на с1) С, Л, Лd1—с1, С, Л, С, Кр, Л, С, Кр, С, Л, С, Лс3—с2, С, Кр, Л, Кр, Лс2—d2, С, Кр, Крb1 : a1.

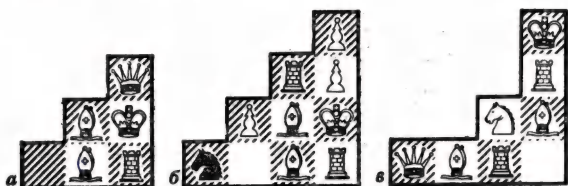


Рис. 60. Зигзаги В. Шинкмана:

а — король попадает на а1, не проходя через б2; б — белый король берет черного коня (при этом конь неподвижен, а король не становится под шах); в — король и ферзь меняются местами

До сих пор в наших перестановочных задачах участвовало довольно много фигур, поэтому использовать какой-либо математический прием было затруднительно. Сейчас же мы рассмотрим несколько перестановочных задач с небольшим числом фигур, решение которых скорее математическое, чем шахматное. Начнем со следующей старинной задачи.

*В противоположных углах шахматной доски  $3 \times 3$  стоят два белых и два черных коня (рис. 61, а). За минимальное число ходов поменять местами белых коней с черными.*

Эта задача, придуманная итальянцем Гуарини еще в XVI в., хорошо известна математикам, часто предлагалась на различных олимпиадах и конкурсах. Наиболее изящно она решается при помощи так называемого метода пуговиц и нитей, придуманного известным изобретателем головоломок Г. Дьюдени (об этом методе и его авторе можно прочитать у Гарднера).

Занумеруем поля нашей маленькой доски, как пока-



зано на рис. 61, б (центральное поле осталось без номера, но оно нас сейчас не интересует, так как кони все равно не могут на него попасть). После этого поместим на каждое из занумерованных полей по пуговице и если между двумя полями возможен ход коня, то расположенные на них пуговицы свяжем нитью. Полученный клубок пуговиц и нитей распутаем так, чтобы все пуговицы расположились по кругу (рис. 61, в).

Теперь решение находится почти автоматически. Выбрав одно из направлений по кругу, достаточно переставлять коней до тех пор, пока они не поменяются местами. Необходимое перемещение на доске получается заменой занумерованных пуговиц соответствующими полями. Нетрудно убедиться, что решение состоит из 16 перестановок коней (8 ходов белых и 8 ходов черных), причем белые и черные кони могут ходить по очереди. Если дополнительно потребовать, чтобы кони разного цвета при своем движении не угрожали друг другу (очередность ходов в этом случае произвольна), то решение также непосредственно следует из рис. 61, в. Нужно следить лишь за тем, чтобы белые и черные кони не оказались на нашем круге рядом. Будем считать, что круговое движение (против часовой стрелки) начинает белый конь а1 (на нем помещена пуговица с номером 1). Тогда в шахматной нотации решение можно записать так: Ka1—b3, Ka3—c2, Kc3—b1—a3, Kc1—a2—c3, Kb3—c1—a2, Kc2—a1—b3, Ka3—c2—a1, Kc3—b1—a3, Ka2—c3, Kb3—c1.

*Поменять местами белых и черных коней (рис. 62, а; 63, а) так, чтобы они ходили по очереди и кони разного цвета не угрожали друг другу.*

Хотя доска на рис. 62, а больше, и на каждой стороне по три, а не по два коня, метод пуговиц и нитей также позволяет быстро найти необходимую перестановку. Распутанный клубок показан на рис. 62, б. Решение состоит из 22 ходов (11 белых и 11 черных): 1. Ka1—b3 Ka4—b2 2. Kb1—c3 Kb4—c2 3. Kc1—a2 Kc4—a3 4. Kb3—c1 Kb2—c4 5. Kc3—a4 Kc2—a1 6. Ka2—c3 Ka3—c2 7. Kc1—a2 Kc4—a3 8. Ka4—b2 Ka1—b3 9. Kc3—a4 Kc2—a1 10. Ka2—b4 Ka3—b1 11. Kb2—c4 Kb3—c1.

Доска на рис. 63, а имеет довольно причудливую форму, но для метода пуговиц и нитей это не является препятствием. Распутывая клубок, получаем картину, изображенную на рис. 63, б (здесь в кружках записаны обо-

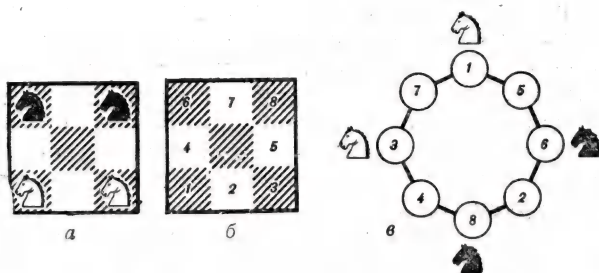


Рис. 61. Метод пуговиц и нитей:

а — задача Гуарини; б — поля доски с номерами; в — распутанный клубок из пуговиц и нитей

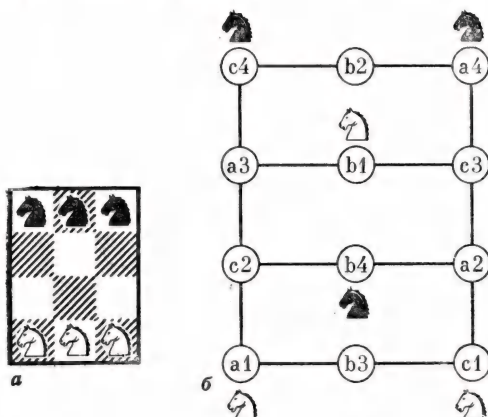


Рис. 62. Задача о перестановке коней:

а — исходное расположение коней; б — распутанный клубок

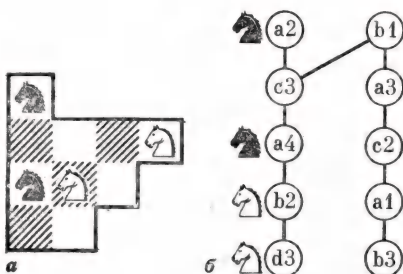


Рис. 63. Метод пуговиц и нитей на необычной доске:

а — исходное расположение коней; б — распутанный клубок

значения самих полей необычной доски). В данной ситуации поле с3 является «транзитным» — связь между «ветками» a2—d3 и b1—b3 возможна только через него.

Из рис. 63, б находим, что для достижения цели необходимо произвести следующие маневры. Сначала перевести через транзит на с3 всех трех коней левой ветки (a4, b2, d3) на правую, причем для экономии времени расположить их на полях b1, a3, с2. Теперь черному коню a2 надо перебраться на d3, а белым коням следует вернуться на левую ветку (поля a4, b2). После этого второй черный конь с2 временно располагается на a2 и пропускает белых коней на правую ветку (поля b1, a3). Наконец, этому

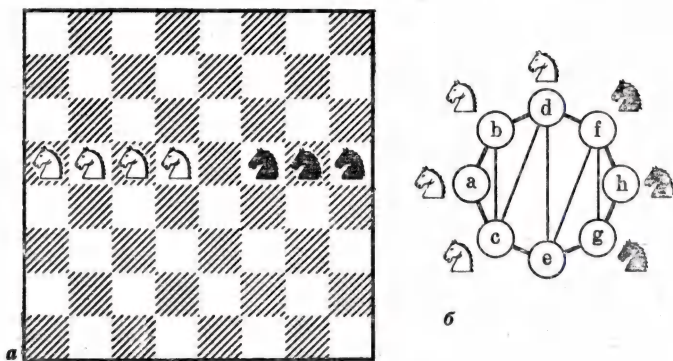


Рис. 64. Задача Лойда «переход через Дунай»

а — исходное расположение коней; б — распутанный клубок

коню надо с a2 пройти на b2, а белым занять поля a4, a2, после чего все кони окажутся на нужных местах. Хотя план не сложен, для его выполнения требуется целых 40 ходов. Заметим, что поля a1, b3 в решении не используются, и их можно было бы вырезать, придав доске еще более причудливую форму.

Метод пуговиц и нитей легко интерпретировать в терминах теории графов. Действительно, каждой из рассмотренных задач можно сопоставить граф, вершины которого (как и раньше) соответствуют полям доски (пуговицам), а ребра — возможным ходам между полями (нитьям). При этом распутывание клубка пуговиц и нитей фактически означает лишь более наглядное расположение



графа на плоскости. Кстати говоря, такое представление условия задачи в виде графа позволяет решать различные перестановочные головоломки, не обязательно шахматные.

«Переход через Дунай». В позиции на рис. 64, а белых коней нужно переставить на вертикали e, f, g и h, а черных — на вертикали a, b и c. При этом очередность ходов может не соблюдаться, кони не должны отступать (белые — влево, черные — вправо), и, кроме того, на каждой вертикали не может находиться более одного коня.

Эта задача принадлежит Лойду, который считал ее одной из своих самых трудных головоломок. Он писал, что многие его друзья долго, но безуспешно ломали голову над тем, как «перейти через Дунай» (вертикаль e). Заменяем условие, что кони не отступают, другим — перестановка должна состоять из минимального числа ходов.

Распутанный клубок пуговиц и нитей показан на рис. 64, б, причем в кружках (пуговицах) записаны вертикали доски, и кружки связаны нитями в том случае, если между вертикалями возможен ход коня.

При передвижении по кругу (подобно тому, как мы это делали в первой задаче; см. рис. 61, в) кони в конце концов расположатся на нужных вертикалях. Однако такая перестановка займет слишком много времени, и поэтому для ускорения дела нужно всякий раз, когда это возможно, использовать внутренние нити. В этом случае перестановку удастся осуществить за 19 ходов. Так как нам безразлично, на какую именно половину доски, верхнюю или нижнюю, ставить коней, то в решении достаточно указать лишь сами вертикали. Приведем теперь самый быстрый «переход через Дунай»: de (на первом же ходу используется внутренняя нить — см. рис. 64, б), fd, gf, eg, se, bc, db, fd, hf, gh, ef, se, ac, ba, dg, fd, ef, se, dc. Легко убедиться, что ни белые, ни черные кони здесь ни разу не отступали. Таким образом, мы не только решили задачу Лойда, но и нашли кратчайшую перестановку.

До сих пор мы имели дело с перестановками коней <sup>40</sup>. Рассмотрим теперь две перестановочные задачи, в одной из которых фигурируют слоны, а в другой — ферзи.

<sup>40</sup> Для решения некоторых перестановочных задач, в которых конь («мустанг») спасается от ладьи, была использована ЭВМ. Об этом рассказывается в статье А. Левина и О. Усковой «Охота на мустанга» («Наука и жизнь», 1972, № 5).

(Напомним, что одну интересную задачу о перестановке ладей мы рассмотрели в главе 6.)

*На первой горизонтали доски  $4 \times 5$  стоят четыре белых слона, а на последней — четыре черных. Поменять местами белых слонов с черными так, чтобы они ходили по очереди и слоны разного цвета не угрожали друг другу.*

Очевидно, достаточно разобраться в отдельности с белополюсными и чернополюсными слонами. Распутав соответствующий клубок, можно установить, что необходимая перестановка состоит из 36 ходов.

*На доске находятся четыре белых ферзя (на полях e4, f2, g8, h6) и три черных (на полях a3, b5, c7). За какое минимальное число ходов белые ферзи могут попасть на ферзевый фланг, а черные — на королевский, если при их перемещении никакие два ферзя не должны угрожать друг другу?*

Соблюдая указанное условие, ферзи могут поменяться флангами за 13 ходов:  $\Phi a3-a1$ ,  $\Phi h6-h3$ ,  $\Phi f2-d2$ ,  $\Phi a1-f6$ ,  $\Phi h3-a3$ ,  $\Phi b5-h5$ ,  $\Phi f6-f1$ ,  $\Phi c7-b6$ ,  $\Phi d2-d7$ ,  $\Phi e4-c2$ ,  $\Phi f1-e1$ ,  $\Phi b6-f6$ ,  $\Phi g8-b8$ .

Если на доске стоят восемь ферзей (например, по четыре белых и черных), то наше задание уже невыполнимо. Если восемь ферзей не угрожают друг другу, то первое же движение любого из них приведет к взаимному нападению, по крайней мере двух из них.

## Глава 12

### ШАХМАТНО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕКОРДЫ

Большинство задач, с которыми мы уже познакомились, связано с теми или иными рекордами на шахматной доске. В одних мы искали различные расстановки на доске максимального и минимального числа фигур (числа независимости и доминирования), в других находили кратчайшие обходные маршруты доски и т. д. Настоящая глава также посвящена шахматно-математическим рекордам, но таким, которые имеют более близкое отношение к самой шахматной игре.

Рассказывая о шахматных рекордах и рекордсменах, прежде всего необходимо упомянуть выдающихся изобретателей головоломок — американца Сэмюэля Лойда (1841—1911) и англичанина Генри Дьюдени (1857—1930), со многими задачами которых мы уже встречались раньше. Почти любая книга по занимательной математике содержит ряд блестящих задач, рожденных неисчерпаемой фантазией Лойда и Дьюдени. Многие творения этих классиков занимательного жанра до сих пор остаются непревзойденными шедеврами.

Головоломки Лойда известны более широко, а его игра «Пятнадцать», о которой шла речь в предыдущей главе, имеет мировую известность. Шахматисты знают Лойда особенно хорошо, так как он является одним из крупнейших шахматных композиторов за всю историю шахмат. Свою первую задачу Лойд опубликовал в 14 лет, а в 16 лет он уже редактировал отдел в нью-йоркском шахматном ежемесячнике. Позднее он стал вести еженедельную страничку в журнале «Scientific American», причем каждая его статья начиналась с изобразительной задачи <sup>41</sup>.

Хотя Дьюдени не был шахматным композитором, но и в его творчестве шахматная тематика занимала значительное место <sup>42</sup>. Любопытно, что как Лойд, так и Дьюдени любили облекать свои задачи в форму забавных анекдотов <sup>43</sup>. Рассмотрим одну «рекордную» задачу, которая является как бы совместным произведением двух великих изобретателей головоломок.

*Пусть на доске стоят все белые фигуры (на исходных местах) и один черный король на h4. Как быстрее всего белые дадут мат? (Первое задание.)*

Это задание принадлежит Лойду, мат ставится в три хода: 1. d2—d4 Kph4—h5 2. Фd1—d3 Kph5—h4 (g4) 3. Фd3—h3 мат; или 1... Kph4—g4 2. e2—e4 + Kpg4—h4 3. g2—g3 мат. Заметим попутно, что h4 — это единст-

<sup>41</sup> Позднее Лойд включил эти странички в свою книгу «Chess strategy» (1878), в которой содержится и ряд шахматно-математических головоломок.

<sup>42</sup> Например, большая часть книги Дьюдени (см. библиографию) посвящена шахматно-математическим головоломкам; в ней, в частности, описан метод пуговиц и нитей, о котором шла речь в предыдущей главе.

<sup>43</sup> О некоторых задачах Лойда и Дьюдени (на разные темы) рассказывается у Гарднера; у него же можно найти дополнительные биографические данные об этих мастерах головоломок.



венное поле для одинокого черного короля, на котором он получает мат в три хода.

Дьюдени заинтересовал другой вопрос: как быстрее всего указанное положение (с полным комплектом белых фигур и черным королем на h4) может получиться из исходной позиции? (Второе задание.)

Поскольку белым нужно взять все 15 черных фигур и пешек, а на первом ходу взятие невозможно, то решение содержит не менее 16 ходов. Дьюдени показал, что 16 и является рекордным числом. Вот придуманная им партия: 1. Kb1—c3 d7—d5 2. Kc3:d5 Kb8—c6 3. Rd5:e7 g7—g5 4. Ke7:c8 Kg8—f6 5. Kc8:a7 Rf6—e4 6. Ka7:c6 Ke4—c3 7. Kc6:d8 Lh8—g8 8. Rd8:f7 Lg8—g6 9. Kf7:g5 Lg6—e6 10. Kg5:h7 Kc3—b1 11. Kh7:f8 La8—a3 12. Kf8:e6 b7—b5 13. Ke6:c7+ Kpe8—f7 14. Kc7:b5 Kpf7—g6 15. Kb5:a3 Kpg6—g5 16. Ka3:b1 Kpg5—h4.

Перед тем как сыграть партию в шахматы со своим товарищем, вы высыпаете все фигуры на стол и расставляете их на разложенной доске. Сколькими различными способами можно при этом получить начальную расстановку фигур?

Пусть расположение доски фиксировано. Тогда белого короля и ферзя можно поставить на доске единственным способом, ладей, коней и слонов — двумя, а для пешек существует 8! вариантов. Таким образом, белые фигуры можно расставить  $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 8!$  способами, и столько же способов существует для расстановки черных фигур. Учитывая также, что саму доску можно расположить на столе двумя способами, окончательно получаем  $2 \times (8 \times 8!)^2$  возможных способов получить начальную расстановку фигур.

Иногда поговаривают, хотя и без оснований, что шахматы в их современном виде будут скоро исчерпаны. При этом предлагаются различные способы модифицировать игру. Один из них заключается в том, чтобы изменить начальное расположение фигур (оставляя их за частоколом пешек). При этом возникает следующая задача.

*Сколько существует начальных расстановок фигур на шахматной доске, удовлетворяющих указанному условию?*

Так как, в отличие от предыдущей задачи, здесь нас интересует не сам процесс расстановки фигур, а начальные позиции для игры, то разные расположения одноименных фигур на фиксированных полях при подсчете не раз-

личаются. Данная задача является классической комбинаторной задачей на подсчет так называемых перестановок с повторениями, которая формулируется так:

*Сколькими способами можно расположить на  $n$  местах  $n$  предметов  $k$  различных типов, если элементы одного и того же типа одинаковы, а число элементов  $k$ -го типа равно  $n_k$  ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ )?*

Доказано, что число искомых перестановок равно  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ . Вернемся теперь к нашей шахматной задаче. Рассмотрим одни белые фигуры, здесь  $n = 8$  (предметы — фигуры), а  $k = 5$ : 1-й тип фигур — короли, 2-й — ферзи, 3-й — ладьи, 4-й — слоны, 5-й — кони, причем  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $n_3 = n_4 = n_5 = 2$ . Итак, число расстановок одних белых фигур равно  $\frac{8!}{1! 1! 2! 2! 2!} = \frac{8!}{8} = 7!$

Столько же существует расстановок и одних черных фигур. Таким образом, окончательный ответ  $(7!)^2 = 20\,361\,600$ . Итак, если игры, отличающиеся начальным расположением фигур на крайних горизонталях, считать разными, то из обычных шахмат можно получить более 20 миллионов новых игр!

Пусть теперь партия начата. Если ваш противник только недавно научился играть в шахматы, то скорее всего вам удастся поставить ему «детский мат»: 1. e2—e4 e7—e5 2. Cf1—c4 Kb8—c6 3. Fd1—h5 Kg8—f6 4. Fh5:f7 мат. Однако рекордный по скорости мат возможен еще быстрее, уже на втором ходу, причем получить его могут только белые: 1. f2—f4 e7—e6 2. g2—g4 Fd8—h4 мат<sup>44</sup>. Всего, как нетрудно видеть, имеется восемь последовательностей ходов, приводящих к мату на втором ходу. Число партий, в которых белые дают аналогичный мат в три хода (ферзем на h5), уже равно 305, а всего имеется 347 способов заматовать черного короля на третьем ходу. У Фабеля можно найти самые разнообразные оценки для числа партий, в которых те или иные фигуры матают на заданном ходу.

Конечная цель шахматной партии заключается в том, чтобы заматовать неприятельского короля. Если на доске стоит мат, то партия автоматически заканчивается. Сразу же заканчивается она и при пате, но в этом случае ничейным исходом. Возникает следующий вопрос.

<sup>44</sup> В «Шахматном словаре» (М., «Физкультура и спорт», 1964) такой мат называется «дурацким».

*Как быстрее всего партия может завершиться патом?*

В отличие от мата, при котором только у короля (стоящего под шахом) нет ходов, при пате все фигуры одной из сторон не имеют хода (при этом их король не находится под шахом). И тем не менее пат может получиться уже на десятом ходу!

1. e2—e3 a7—a5 2. Фd1—h5 Лa8—a6 3. Фh5:a5 h7—h5  
4. Фa5:c7 Лa6—h6 5. h2—h4 f7—f6 6. Фc7:d7 + Кpe8—f7  
7. Фd7:b7 Фd8—d3 8. Фb7:b8 Фd3—h7 9. Фb8:c8 Kpf7—  
g6 10. Фc8—e6 пат! (рис. 65, а)

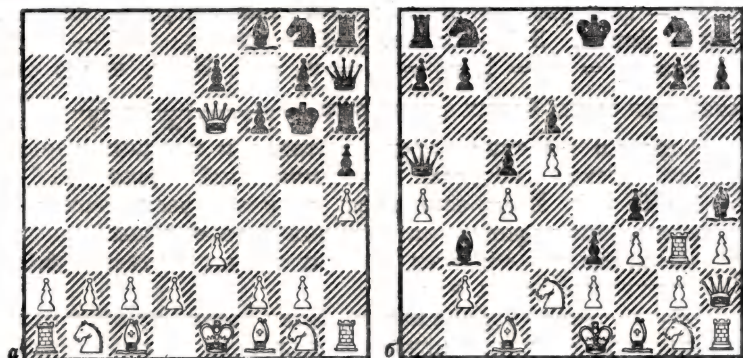


Рис. 65. Патовые рекорды:

а — пат на десятом ходу; б — пат на двенадцатом ходу

Эта рекордная партия С. Лойда придумана около ста лет назад. Идее, содержащейся в ней, можно придать и несколько иное оформление:

1. c2—c3 d7—d5 2. Фd1—b3 h7—h5 3. Фb3:b7 Cc8—f5  
4. Фb7:a7 Cf5—h7 5. Фа7:b8 Лa8—a6 6. Фb8:c7 Лa6—h6  
7. h2—h4 f7—f6 8. Фc7:d8 + Кpe8—f7 9. Фd8:d5 + Kpf7—g6  
10. Фd5—e6 пат! В отличие от предыдущей партии, здесь на h7 замуровывается не ферзь, а слон черных.

*Потребуем теперь, чтобы ни одна из фигур (ни белых, ни черных) не была взята. За сколько ходов возможен пат в этом случае?*

Кажется, что сильное дополнительное условие намного затягивает партию; тем удивительнее, что пат получается всего на два хода позднее!



1. d2—d4 d7—d6 4. Фd1—d2 e7—e5 3. a2—a4 e5—e4  
 4. Фd2—f4 f7—f5 5. h2—h3 Cf8—e7 6. Фf4—h2 Cc8—e6  
 7. Ла1—a3 c7—c5 8. Ла3—g3 Фd8—a5+ 9. Kb1—d2  
 Ce7—h4 10. f2—f3 Ce6—b3 11. d4—d5 e4—e3 12. c2—c4  
 f5—f4 пат! (рис. 65, б)

Доказать строго, что приведенные паты быстрее, практически невозможно, так как для этого пришлось бы перебрать все 9- и 11-ходовые партии. И все же нет никаких сомнений, что эти рекорды Лойда непревзойденны.

Законченной вничью партия считается также в том случае, если на доске возникла позиция, в которой мат невозможен (король против короля, король против короля и легкой фигуры, король и слон против короля и слона при одноцветных слонах). Здесь наиболее интересен такой вопрос.

*Через сколько ходов после начала партии на доске могут остаться одни «голые» короли?*

Для этого каждая сторона должна съесть по 15 фигур и пешек противника. Так как на первом ходу белым нечего брать, в партии будет сделано не менее 16 ходов. Правда, известны лишь 17-ходовые сражения, приводящие к опустошению доски. Одно от другого они отличаются заключительным положением королей. Приведем партию, в которой короли заняли оппозицию: белый оказался на f1, а черный — на f8.

1. e2—e4 d7—d5 2. e4:d5 Фd8:d5 3. Фd1—h5 Фd5:a2  
 4. Фh5:h7 Фа2:b1 5. Фh7:g7 Лh8:h2 6. Ла1:a7 Лh2:g2  
 7. Ла7:b7 Лg2:g1 8. Лb7:c7 Фb1:b2 9. Лc7:c8+ Кpe8—d7  
 10. Лc8:b8 Ла8:b8 11. Cc1:b2 Лb8:b2 12. Лh1:g1 Лb2:c2 13.  
 Фg7:f7 Лc2:d2 14. Фf7:e7+ Кpe8:e7 15. Лg1:g8 Лd2:f2  
 16. Лg8:f8 Лf2:f1+ 17. Кpe1:f1 Кpe7:f8. Как мы видим, белые и черные фигуры вместе истребляются всего на один ход позднее, чем одни черные.

Вничью партия заканчивается также при трехкратном повторении позиции. Приведем это правило в том виде, как оно сформулировано в шахматном кодексе:

«Партия считается законченной вничью, если в ней три раза или более возникает одна и та же позиция (одни и те же фигуры одного и того же цвета занимают одни и те же поля), а очередь хода каждый раз будет за одной и той же стороной. При этом не должны измениться и внутренние возможности позиции (ни одна из сторон не должна потерять право рокировки или взятия на проходе пе-

приятельской пешки). Порядок признания ничьей должен быть следующим: если один противник сделал ход, после которого позиция возникла третий раз или более, то другой противник может до своего очередного хода просить судью зафиксировать ничью; если противник, заявляющий о ничьей, достигает троекратного возникновения позиции своим ходом, то он не должен делать его на доске (после чего право требовать ничью утрачивается), а лишь записать на бланке и сообщить судье»<sup>45</sup>.

Известный английский математик Литлвуд на это замечает, что правила игры не уточняют следующее: должно ли при повторении позиции учитываться, занимают одни и те же фигуры старые места или нет<sup>46</sup>. Он рассказывает, что в одной из партий Блэкберна позиция повторилась третий раз, но пара ладей при этом поменялась местами. Каждый из противников играл на выигрыш, но если кто-нибудь из них потребовал бы признать партию ничьей, то возник бы тонкий вопрос интерпретации правил судьей. . .

Партия Блэкберна состоялась лет сто назад; однако и современный шахматный кодекс не дает четкого разъяснения на этот счет. Правда, первую скобку в приведенном выше правиле можно трактовать как обязательство судьи фиксировать ничью, но утверждать это категорически оснований нет. Еще об одной тонкости, связанной с троекратным повторением позиции, мы упомянем в следующей главе, рассказывая об игре «двухходовые шахматы».

Частным случаем троекратного повторения позиции является вечный шах, при котором одна из сторон не может избежать повторения и в дальнейшем. Обычно вечным шахом борьба заканчивается в эндшпиле, однако в рекордной партии это происходит уже после третьего хода: 1. f2—f4 e7—e5 2. Kpe1—f2 Фd8—f6 3. Kpf2—g3 Фf6:f4+, и черные дают вечный шах (Фf4—h6+, Фh6—f4+).

Поскольку число шахматных позиций конечно (обозначим его через  $A$ ), то после  $3A$  ходов в любой партии одна из позиций повторится трижды. (Это еще не означает существование самой длинной шахматной партии,

<sup>45</sup> «Шахматный кодекс СССР». М., 1969, стр. 12.

<sup>46</sup> См.: Дж. Литлвуд. Математическая смесь. М., «Наука», 1973, стр. 112.

так как по кодексу ничья наступает только при заявлении одного из партнеров.) Интересен следующий вопрос, который в свое время привлек внимание математиков.

*Существует ли бесконечная шахматная партия, в которой ни одна серия ходов не повторяется три раза подряд?*

Очевидно, здесь роль тоекратного повторения позиции играет тоекратное повторение серии ходов. Это изменение весьма существенно. Оказывается, такая партия существует, причем «до бесконечности» по доске могут перемещаться одни короли. Более того, каждый из них может маневрировать всего на трех полях! Пусть белый король находится в левом нижнем углу (поля a1, a2, b1), а черный — в правом верхнем (поля h8, h7, g8). Обозначим ходы королей по часовой стрелке через 0, а против часовой стрелки — через 1. Тогда всякому движению королей соответствует определенная последовательность из нулей и единиц. Наоборот, если начальное положение королей фиксировано, то всякая последовательность указанного типа дает некоторое перемещение королей. Если, например, короли стоят на угловых полях, то последовательности 01 10 10 01 10 01 01 10 соответствуют такие ходы (цифры на нечетных местах отвечают ходам белых, а на четных — ходам черных): 1. Кра1 — a2 (первый член последовательности 0 — белый король идет по часовой стрелке) 1... Kph8—g8 (второй член 1 — черный король идет против часовой стрелки) 2. Кра2—a1 Kpg8—h8 3. Кра1—b1 Kph8—h7 4. Kpb1—a1 Kph7—h8 5. Кра1—b1 Kph8—h7 6. Kpb1—a1 Kph7—h8 7. Кра1—a2 Kph8—g8 8. Кра2—a1 Kpg8—h8.

Поскольку бесконечные последовательности из нулей и единиц, в которых ни одна группа цифр не повторяется трижды подряд, существуют, то существует и искомая бесконечная шахматная партия. Любопытно, что один из способов построения необходимой последовательности приведен в книге Ягломов, постоянно цитируемой нами, причем этот вопрос рассмотрен там независимо, без всякой связи с шахматами.

Последний вид ничьей<sup>47</sup> связан с «правилом 50 ходов», о котором уже шла речь в главе 4. Если пятьдесят

<sup>47</sup> Кроме, разумеется, самого простого, когда один из противников предлагает ничью, а другой соглашается. Если это происходит слишком рано, то говорят о «гроссмейстерской ничьей».



ходов подряд ни одна фигура не была разменена и ни одна пешка не продвинулась, то партия автоматически заканчивается вничью. «Правило 50 ходов» примечательно тем, что только оно гарантирует нам существование самой длинной шахматной партии. Произведем следующие расчеты.

Шестнадцать пешек в процессе игры могут сделать не более  $16 \times 6 = 96$  ходов, а из тридцати возможных взятий восемь производится при ходах пешек (иначе они не пройдут «друг сквозь друга»). Итак, партия не может продлиться более  $(96 + 22) \times 50 = 5900$  ходов. Более тонкий анализ показывает, что самая длинная шахматная партия продолжается на два хода меньше — 5898.

Мы знаем, что число шахматных позиций конечно (см. главу 1), конечно и число шахматных ходов (сколько их всего, мы узнаем в конце этой главы). Нетрудно видеть, что любой из этих фактов с учетом «правила 50 ходов» (ограниченность длины партии!) гарантирует нам конечность числа шахматных партий.

Перейдем теперь к другим рекордным задачам на шахматной доске.

*Черные симметрично повторяют ходы белых (конечно, пока это возможно). Зная об этом, за сколько ходов белые могут объявить мат?*

Мат дается уже на четвертом ходу, причем двумя способами: 1.  $c2-c4$   $c7-c5$  2.  $\Phi d1-a4$   $\Phi d8-a5$  3.  $\Phi a4-c6$   $\Phi a5-c3$  4.  $\Phi c6:c8$  мат; 1.  $d2-d4$   $d7-d5$  2.  $\Phi d1-d3$   $\Phi d8-d6$  3.  $\Phi d3-h3$   $\Phi d6-h6$  4.  $\Phi h3:c8$  мат.

Известна такая забавная история. Некто явился в шахматный клуб и объявил, что нашел способ не проигрывать черными. «Каким образом?» — спросили его. «Очень просто, — повторяя ходы противника!» Сыграть с наивным изобретателем вызвался Лойд, который и объявил ему мат в 4 хода.

Шахматный юморист И. Крейчик в рассказе «Когда двое делают одно и то же» приводит три симметричные партии, заканчивающиеся матом черному королю. Вот одна из них, «опровергающая» ферзевый гамбит: 1.  $d2-d4$   $d7-d5$  2.  $Kg1-f3$   $Kg8-f6$  3.  $c2-c4$   $c7-c5$  4.  $Cc1-g5$   $Cc8-g4$  5.  $e2-e3$   $e7-e6$  6.  $Kb1-c3$   $Kb8-c6$  7.  $Cf1-e2$   $Cf8-e7$  8.  $0-0$   $0-0$  9.  $Cg5-f6$   $Cg4-f3$  10.  $Cf6:g7$   $Cf3:g2$  11.  $Cg7:f8$   $Cg2:f1$  12.  $Cf8:e7$   $Cf1:e2$  13.  $Ce7:d8$   $Ce2:d1$  14.  $c4:d5$   $c5:d4$  15.  $d5:c6$   $d4:c3$  16.  $c6:b7$   $c3:b2$  17.  $b7:a8\Phi$

b2:a1Ф 18. Cd8—f6 мат! В отличие от четырехходовых рекордных партий, где белые «рисковали», подставляя ферзя под удар (на полях с6 или h3), здесь мы имеем дело с вполне осмысленной игрой.

Кажется невероятным, но при точном копировании ходов черные даже в состоянии выиграть. Белые (шутки ради!) при такой игре могут заматовать самих себя, причем «обратный» мат ставится уже на восьмом ходу! Приведем этот забавный рекорд Лойда, также относящийся к исходной позиции.

1. e2—e4 e7—e5 2. Kpe1—e2 Kpe8—e7 3. Kpe2—e3 Kpe7—e6 4. Фd1—f3 Фd8—f6 5. Kg1—e2 Kg8—e7 6. b2—b3 b7—b6 7. Cc1—a3 Cc8—a6 8. Ke2—d4+! e5:d4 мат!

Известно множество задач, в которых требуется найти число кратчайших партий, приводящих к определенной позиции. Ограничимся одним примером на эту тему.

*Сколько существует кратчайших партий, приводящих к симметричной позиции, в которой все пешки запатованы (не имеют ходов)?*

Самая быстрая партия состоит из 8 ходов, например: 1. e2—e4 e7—e5 (здесь и далее черные симметрично повторяют ходы белых) 2—8. b2—b4, g2—g4, Фd1—f3, Cc1—e3, Cf1—d3, Kb1—a3, Kg1—h3. Можно показать, что в зависимости от порядка приведенных ходов существуют  $(8!/6)^2$  искомым партий.

Основным элементом шахматной игры является ход. Ход может сопровождаться взятием фигуры противника, шахом или матом. Существует огромное число рекордных задач, связанных с различными видами ходов. Рассмотрим следующую позицию. Белые: Kpd5, Фg7, Ла5; черные: Kph5, ph4. Здесь при ходе белого короля его черный оппонент может получить мат 6 способами (решает любое отступление белого короля с пятой горизонтали). У коня, стоящего на месте короля, имелось бы 8 способов объявить мат, а у слона — 13 (матуют любые ходы коня и слона). Очевидно, 6, 8 и 13 — это максимальное число матов, которое в состоянии дать король, конь и слон при своем ходе. Возникают следующие вопросы.

Какое максимальное число матов в один ход можно поставить при ходе ферзя, ладьи и пешки? Кому принадлежит рекорд?

При ходе ладьи возможны 14 матов. В следующей по-

позиции матует любой ее ход — белые: Kpf8, Ld4, Ca1; черные: Kph8, ph7. Ферзь, в отличие от других фигур, не может объявить вскрытый шах, а значит — и мат, и поэтому должен действовать самостоятельно. Максимальное число полей, с которых он может в один ход напасть на короля, равно 12 (3 — по горизонтали, 3 — по вертикали и 6 — по двум диагоналям). В следующей позиции любой из 12 возможных шахов ферзем является одновременно и матом — белые: Кре8, Фd3, Ла5, Се7, Ch1; черные: Кре6. Так как вертикали и горизонтали, по которым матует ферзь, образуют крест, то шахматные композиторы называют такую ситуацию «ферзевым крестом».

На первый взгляд кажется, что меньше всего матов при своем ходе может объявить пешка. Однако у нее имеется столько же возможностей, сколько и у ферзя. Тонкость заключается в том, что пешка, достигнув восьмой горизонтали, имеет право превратиться в любую из четырех фигур, и все эти превращения считаются разными ходами. В приводимой позиции пешка e7, как нетрудно убедиться, дает 12 различных матов. Белые: Kpg5, Фd7, Lh8 и e7; черные: Kpf7, Lf8, Kd8.

Итак, у ферзя и пешки имеется 12 способов поставить мат в один ход, у короля — 6, коня — 8, слона — 13 и ладьи — 14, т. е. рекорд принадлежит ладье.

Целая серия рекордных задач связана с конструированием таких шахматных позиций, для которых выполняются следующие условия:

- 1) число возможных ходов максимально;
- 2) число возможных взятий максимально;
- 3) число возможных шахов максимально;
- 4) число возможных матов максимально.

Каждую из необходимых позиций можно конструировать при одном из следующих четырех дополнительных условий:

а) на доске нет превращенных фигур, а превращение пешек запрещается;

б) превращенных фигур нет, но пешкам разрешается превращаться в фигуры;

в) могут иметься превращенные фигуры;

г) позиции могут быть неправильными, т. е. не получающимися в настоящей шахматной партии.

Учитывая, что каждое задание может относиться как к белым фигурам, так и к белым и черным вместе, всего



Таблица 3

Тема	Цвет фигур	Без превращенных фигур		С превращенными фигурами	Неправильные позиции
		без превращения пешек	с превращением пешек		
Максимальное число ходов	б	1) 109	3) 144	5) 218	7) 288
	б и ч	2) 181	4) 223	6) 324	8) 412
Максимальное число взятий	б	9) 49	11) 68	13) 65	15) 168
	б и ч	10) 88	12) 109	14) 116	15) 336
Максимальное число шахов	б	16) 45	18) 52	19) 105	21) 143
	б и ч	17) 82	17) 85	20) 142	21) 170
Максимальное число матов	б	22) 43	24) 47	19) 105	21) 143
	б и ч	23) 68	25) 68	26) 107	27) 143

получаем  $4 \times 4 \times 2 = 32$  рекордные задачи. В табл. 3, составленной Петровичем<sup>48</sup>, указаны все 32 рекордных числа, известных к моменту составления. Некоторые рекорды установлены чуть ли ни 100 лет назад, другие, наоборот, совсем недавно. Основным рекордсменом является сам Петрович (11 позиций). В табл. 3 перед каждым рекордом указан номер позиции, под которым она приводится ниже. Совпадение некоторых номеров означает, что соответствующие рекорды достигаются при конструировании одной и той же позиции. Надо признать, что рекордные позиции, как правило, довольно громоздки и не отличаются эстетичным видом. Заметим, что в каждой строке табл. 3 рекордные числа возрастают. Это естественно, так как чем правее мы находимся, тем менее жесткие требования накладываются на позиции.

Приведем теперь все 27 рекордных позиций. Вполне вероятно, что какие-то из этих рекордов читателю удастся улучшить, и тогда он захочет сравнить свои позиции с известными.

1) См. рис. 66, а.

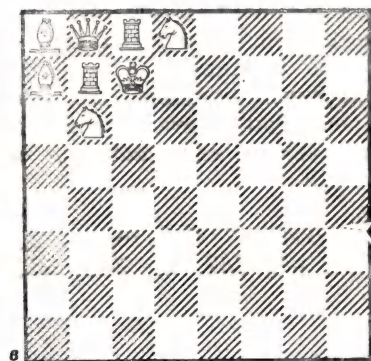
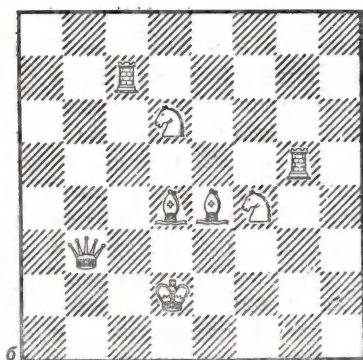
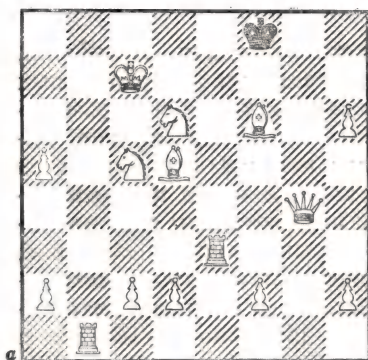
2) Белые: Kpc2, Фе4, Ла1, h8, Cd6, f7; Ке2, f6, пп b2, b6, g2; черные: Kpg7, Фг5, Ла8, h1, Cd7, f2, Кс3, d3, пп с7, е7, f3.

<sup>48</sup> «Problem» (Zagreb), 1967, may, № 106—108.

4) Белые: Kph3, Фf4, Ле1, g1, Cf6, h5, Ka1, c1, пп a7, c7, d7, f7, h7; черные: Kpb6, Фd5, Ла4, e8, Cd3, d6, Kb8, g8, пп b2, d2, f2, h2.

6) Белые: Крh2, Фa6, b8, c1, d8, e1, f8, h3, h5, h7, Лг1, Са4; черные: Кра2, Фa3, a5, b1, c8, d4, e8, f1, g8, h6, Ла7, Ch1.

8) На всех 28 крайних полях доски стоят ферзи —



а — 109 возможных ходов;  
б — 100 возможных ходов;  
в — 10 возможных ходов

14 белых (Фа1, а2, а4, а6, а8, b8, d8, f8, h7, h5, h3, g1, e1, c1) и столько же черных (Фа3, а5, а7, с8, е8, g8, h8, h6, h4, h2, h1, f1, d1, b1).

9) Белые: Кра6, Фd5, Лс7, е7, Сb6, g6, Kd6, f6, пп а4, b3, с3, d3, е3, f3, g3, h3; черные: Kpd2, Фh5, Лb7, d7, Ca5, f7, Kc8, е8, пп а7, b5, с4, d4, е4, f4, g4, h7.

10) Белые: Кре6, Фd6, Ла1, с3, Се4, f6, Ke1, е3, пп а4, b4, с4, d4, е2, f4, g4, h4; черные: Kpd2, Фd3, Ла3, d1, Се5, f3, Kc2, g2, пп а5, b5, с5, d5, е7, f5, g5, h5.

11) Белые: Kpg5, Фh7, Лd4, е5, Се2, Kd6, f6, пп b7, с7, d7, е7, f7, g7; черные: Kpb2, Фd8, Ле8, h8, Cc8, f8 Kb8, g8, пп с4, d5, е4, f5, h5.

12) Белые: Кре3, Фе1, Лс1, Cd1, g1, Kb1, f1, пп b7, с7, d7, е7, f7, g7; черные: Кре6, Фf8, Лb8, g8, Cc8, h8 Kd8, е8, пп с2, d2, е2, f2, h2.

13) Белые: Kpd8, Фс5, d3, d7, е1, е5, f3, f7, g5, Лb7 h8, Ca5, b3, е8, h3, Kg3, g7; черные: Кра8, Фb5, е3, f1 f5, Лс7, d1, Cc3, d5, Ke7, h5.

14) Белые: Фb5, с3, d1, d5, е3, е7, f5, g3, Лс7, g7, Ca3 f1; черные: Kph8, Фb3, с5, d3, d7, е1, е5, f3, g5, Лb7 f7, Cc1, h3.

15) 32 белых коня на всех белых полях доски и 32 черных коня на всех черных полях доски.

16) Белые: Kpf7, Фd4, Лf8, g5, Се4, h6, Kc3, h4 пп d2, f2, h2, h3; черные: Kpf4, пп е3, g3.

17) Белые: Kpf3, Фd8, Лb7, f6, Ca8, d6, Ka6, g8 пп а5, с4, е4; черные: Kpc6, Фе1, Лс3, g2, Се3, h1, Kb1, h3, пп d5, f5, h4.

18) Белые: Кре7, Фf5, Лс4, d1, Ca2, е5, Kd3, е8, пп а7, b5, d7, е2, h7; черные: Kpd5, Лg8.

19) Белые: Кра2, Фb4, b6, d2, d8, f3, f8, g1, g6, h4; черные: Кре5, п а6.

20) Белые: Kpc1, Фb4, b6, d2, d8, f3, f8, g1, h4, h6; черные: Кре5, Фа1, а2, пп а3, b3, с2.

21) Белые: Фа2, а3, а4, а6, а8, b1, b4, b6, b7, c1, c8, d1, d2, d7, d8, f1, f2, f8, g1, g4, g6, g8, h1, h3, h4, h6, h7, п а7; черные: Кре5, Kb8.

22) Белые: Kpg5, Фd3, Лf7, h5, Cd4, g8, Ka2, g2, пп с2, е2; черные: Kpd5, Kd8.

23) Белые: Kpf3, Фе6, Лb7, c1, Ca8, d6, Ka6, с3; черные: Kpc6, Фd3, Лf8, g2, Ch1, Kf6, h3.

24) Белые: Кра8, Фf7, Лb5, d3, Ca4, d4, Kc4, е4, пп с7, е7; черные: Kpd7, Cd8, Kb8, f8.



25) Белые: Kpf2, Фс7, Лg5, h7, Cf1, h4, Kd1, h1, пп d7, f7; черные: Kpe7, Фd2, Лb6, h2, Ca7, c8, Ke8, g8, пп c2, e2, e4, g2.

26) Белые: Kpc4, Фd8, e2, e3, e8, g2, g7, g8, h4, h6, Ca4, Kc8; черные: Kpf5, Фа3, a5, b1, b2, b7, d1, d6, d7, e1, Ch5, Kf1.

27) Белые: Kpc4, Фа1, a2, a4, a6, c1, d8, e2, e3, e7, e8, g1, g2, g8, h2, h4, h6; черные: Kpf5, Фа3, a5, a7, b1, b7, b8, d1, d2, d6, d7, e1, f8, h3, h5, h7, h8.

Еще 16 рекордов можно установить, если вместо четырех дополнительных условий (указанных в табл. 3 сверху) потребовать, чтобы: а) каждое из основных заданий — ход, взятие, шах, мат были вынужденными; б) в позиции участвовали в точности 16 белых и 16 черных фигур в обычном количестве. Заметим, что в позиции № 15 каждый ход и белых и черных является вынужденным взятием, а в позициях № 11, 12 участвует полный комплект шахматных фигур.

Рассмотрим еще две интересные рекордные задачи, в которых участвует полный комплект фигур одного цвета (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня).

*Расставить на доске эти восемь фигур так, чтобы они могли сделать максимально возможное число ходов.*

Вместе с пешками фигуры одного цвета, как мы видели, могут сделать 109 ходов (рис. 66, а). Если же пешек нет, максимальное возможное число ходов равно 100 (рис. 66, б). Интересно сравнить расстановки наших восьми фигур на рис. 56, а и 66, б. Во втором случае восемь фигур имеют в своем распоряжении целых 100 ходов, но при этом 14 полей доски — вне обстрела. В первом же случае белые фигуры могут сделать только 74 хода, но зато держат под обстрелом все поля доски.

*Расставить на доске те же восемь фигур так, чтобы они могли сделать минимально возможное число ходов.*

При самом неуклюжем расположении фигуры могут сделать всего 10 ходов (на рис. 66, в семь ходов делают кони и три — король). Последние два рекорда установлены еще в прошлом веке и давно признаны окончательными. Кстати, позиция на рис. 66, в является рекордной еще в двух отношениях:

а) фигуры здесь угрожают минимально возможному числу полей — 16; б) в состоянии двигаться минимально возможное число фигур — 3 (король и кони).

В шахматной композиции имеются задачи, в которых мат дается в 100, 200 и более ходов. Их решение строится на каком-нибудь основном звене, ухватившись за которое удастся вытянуть всю цепь. Обычно это систематически повторяемый белыми несложный маневр, предназначенный для выигрыша одного темпа за другим. Рекорд в этом жанре (для реальных позиций) принадлежит венгерскому шахматному композитору О. Блаты, не имевшему себе равных в составлении так называемых задач-монстров. Любопытно, что Блаты обладал феноменальными счетными способностями: так, по дороге на работу из дома (около 3 км) он успевал с точностью до 30-го (!) знака подсчитать в уме число типа  $\sqrt[23]{329^{19}}$ .

Приведем рекордную задачу Блаты, которую наиболее терпеливым читателям предлагаем решить самостоятельно. Белые: Krb4, Fd2, пп a5, c2, e6, f2, f4, g2, g5; черные: Krc7 Фa8, Le5, Kg8, h8, пп a6, b7, c4, e7, e4, f5, g6, h4. Белые начинают и дают мат в 257 (!!) ходов.

*Сколько различных ходов существует в шахматной партии?*

Ход в шахматах характеризуется фигурой, которая его делает, цветом этой фигуры, начальным и конечным полями, взятой фигурой (если ход совершается со взятием) и превращенной фигурой (если данным ходом пешка достигает последней горизонтали). Надо также учесть рокировки. Подробный анализ показывает, что на шахматной доске существует ровно 43 732 различных ходов.

Последнему вопросу можно придать шуточный оттенок. Сколькими ходами может закончиться шахматная партия?

Таких ходов — 43 732. Дело в том, что после любого вашего хода... противник может тут же сдаться!

Эта глава оказалась несколько переполненной «чистыми» шахматами, и поэтому закончим ее одним «рекордом» другого типа.

Какое максимальное число очков можно набрать в двух партиях с гроссмейстерами, совершенно не умея играть в шахматы!?

Оказывается, такой матч вы можете спокойно свести вничью. После того как гроссмейстер, играющий белыми, начнет партию, нужно повторить его ход на другой доске, где белыми играет вы. Теперь ход черных, которыми играет второй гроссмейстер, воспроизводится на первой

доске, а ответный — снова на второй, и т. д. В результате одна из партий закончится вашей победой или же оба гроссмейстера довольствуются ничьей.

Эта забавная идея «двойной игры» служит темой для многочисленных шахматных анекдотов. Широко распространена следующая история. Во время одного международного турнира к Ласкеру обратился незнакомец и предложил сыграть с его талантливым сыном. Если чемпион мира занят, то это можно сделать по переписке. Чтобы Ласкер не зря тратил время, в случае победы он получит 500 долларов. Если же сынок чудом выиграет (на что отец, разумеется, не рассчитывает), то тогда уж Ласкер уплатит 2500 долларов, а в случае ничьей — лишь 1000 долларов. Ласкер согласился на такие условия. В конце концов ему удалось выиграть партию, хотя и с огромным трудом. Тайна раскрылась позднее. Выяснилось, что Ласкер встречался по переписке с самим Капабланкой, игравшим на тех же условиях! В итоге Капабланка сильно «пострадал» на этом деле, а мнимый «отец» положил в карман чистую прибыль в размере 2000 долларов.

В других вариантах этого анекдота фигурирует Алехин. Он якобы согласился играть на большую ставку с двумя неизвестными игроками, которые пошли на ту же махинацию с «двойной» игрой. Положение казалось безвыходным. Ставка была неравной, и в любом случае Алехин оставался в проигрыше. Однако Алехин нашел способ наказать ловких «рекордсменов». На одной из досок он допустил грубейшую ошибку. Компаньоны решили не повторять на другой доске явно проигрывающий ход Алехина, а выиграть обе партии. Но отказ от копирования ходов привел к «роковым» последствиям — Алехин выиграл обе партии!

## Глава 13

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Шахматная игра создавалась на протяжении многих веков и ее правила неоднократно менялись. С точки зрения математики, движение шахматных фигур и форма доски имеют весьма условный характер. Существует множество самых разнообразных игр на прямоугольных дос-



ках, теория которых занимает значительное место в математической литературе. Одних только шашечных игр известно больше десятка: русские, стоклеточные, шашки Ласкера, поддавки, уголки и др. Даже современные шахматы имеют ряд разновидностей, в основном — в неевропейских странах. Например, Гарднер рассказывает о японских шахматах (соги), китайских (цюнъ ки), корейских (тьян-кеун). Сейчас мы остановимся на некоторых шахматных играх и задачах (содержащих математические элементы), в которых доска или правила игры отличаются от обычных.

**До первого шаха.** В этой игре все, как в настоящих шахматах, только выигрывает не тот, кто «первым» дает мат, а тот, кто первым объявляет шах. При нормальной начальной позиции белые форсированно побеждают, причем не позднее пятого хода.

1. Кb1—с3. Грозит выпад коня на e4, d5 или b5 с неизбежным шахом, у черных единственный ответ: 1... e7—e6 (1... e5 не спасает из-за 2. Kd5 и 3. Kf6 с шахом). Теперь после 2. Kc3—e4 Kpe8—e7 3. Kgl—f3 второй конь с решающим эффектом вступает в игру. 3...Фd8—e8 (3... d6 4. Kd4) 4. Kf3—e5 и шах следующим ходом.

Чтобы «оживить» игру, следует каким-либо образом изменить начальную позицию, например передвинув белую пешку с c2 на c3, а черную — с c7 на c6. Теперь невозможен первый ход 1. Kc3, и форсированного выигрыша уже не видно, например после 1. Фb3 d5 2. Фb4 Фd6! 3. Фа4 Cd7 4. Фh4 Kf6 черный король надежно защищен.

**Двухходовые шахматы.** В этой игре каждый ход белых и черных состоит из двух обычных. Такое изменение правил позволяет доказать следующий неочевидный и неожиданный факт.

При правильной игре в двухходовые шахматы белым, по меньшей мере, гарантирована ничья.

Попробуем доказать это от противного. Пусть при наилучшей игре обеих сторон белые проигрывают. После 1. Кb1 — c3 — b1 сохраняется начальная позиция, а первый ход уже принадлежит черным. Фактически теперь черные играют белыми и, по предположению, проигрывают. Противоречие.

Кажется, все правильно. Однако это доказательство не совсем точно. После первого хода белых позиция действительно повторяется, но ситуация иная! Так, после

1 . . . Kg8 — f6 — g8 2. Kb1 — c3 — b1 белые еще не могут требовать ничью, а черные могут, поскольку 2. . . . Kg8 — f6 — g8 приводит к троекратному повторению исходной позиции при ходе белых. Таким образом, нельзя считать, что после 1. Kb1 — c3 — b1 «черные играют белыми» — возможности сторон разные. Кстати, аналогичный пример можно привести и на «правило 50 ходов».

Примечательно, что эту весьма тонкую ошибку в доказательстве обнаружил академик А. Н. Колмогоров.

Приведем теперь строгое доказательство. По-прежнему считаем, что черные при безукоризненной игре обеих сторон выигрывают. Будем играть одновременно на двух досках. На первой пойдем 1. Kb1 — c3 — b1, а ответный ход черных воспроизведем на второй доске со стороны белых. Затем ответ черных на второй доске повторим на первой за белых, ход черных на первой — за белых на второй и т. д. По нашему предположению, черные выигрывают и, значит, наступит момент, когда на первой доске своим очередным ходом они объявят мат белому королю. Но тогда на второй доске при повторении этого хода за белых возникнет позиция, в которой мат получает черный король! Но ведь черные и на второй доске играли безошибочно. Противоречие.

Заметим, что в отличие от ловкого обманщика, игравшего с Ласкером и Капабланкой одну партию белыми, а другую черными (см. главу 12), мы действовали абсолютно честно — обе партии играли одним цветом!

Наше доказательство, как говорят математики, неконструктивно. Мы доказали, что белые могут не проиграть в двухходовые шахматы, но не выяснили, как им нужно играть. Более того, если будет показано, что белые выигрывают (как, например, в игре «до первого шаха»), то тогда, очевидно, первый ход 1. Kb1—c3—b1 проигрывает! Таким образом, не исключено, что наше доказательство беспроигрышности белых проведено с помощью проигрывающего хода!

Вот одна из распространенных модификаций двухходовых шахмат. У одного игрока полный комплект фигур, которые ходят, как обычно, а у другого лишь король и несколько пешек, но делают они по два хода. Цель слабой стороны — взять неприятельского короля. Тот, кто впервые знакомится с этой игрой, всегда выбирает обычные фигуры и. . . быстро проигрывает, даже если у про-

тивника всего лишь король и пара пешек. По-видимому, примерное равенство «сил» в этой игре сохраняется в том случае, если этого короля сопровождают 5—6 пешек.

**Шахматы без цугцванга.** Если в некоторой позиции любой ход белых проигрывает, то мы говорим, что они в цугцванге (если проигрывает и любой ход черных, то цугцванг взаимный). Шахматы без цугцванга отличаются от обычных добавлением одного хода — хода на месте. В них цугцванга не бывает, так как всегда можно передать очередь хода партнеру.

Приведенное выше доказательство того, что при правильной игре в двухходовые шахматы белым гарантирована ничья, полностью проходит и для шахмат без цугцванга. Однако, в отличие от двухходовых шахмат, поиск непосредственного мата здесь безнадежен! Напомним, что в настоящих шахматах, где шансы белых, судя по статистике, заметно выше, вовсе не доказано, что даже при наилучшей игре им обеспечена хотя бы ничья.

Среди студентов мехмата большой популярностью пользуется следующая игра в крестики и нолики. На клетчатой бумаге произвольной формы (хоть «бескогечной») двое по очереди ставят крестики и нолики. Побеждает тот, кто первым ставит пять своих значков подряд (по вертикали, горизонтали или диагонали). Подобно двухходовым шахматам и шахматам без цугцванга, можно доказать, что и здесь начинающий при безупречной игре не проигрывает. Правда, доказательство в данном случае сложнее, чем в шахматных играх.

**Поддавки.** Эта игра более популярна в шашках, однако и ее шахматный вариант весьма интересен. Победителем в ней становится тот, кто первый отдает все свои фигуры. Взятие в этой игре обязательно (в том числе и короля, которого можно ставить под бой), а если возможно несколько взятий, то выбор произволен.

Идеи и комбинации, возникающие в поддавках, довольно оригинальны и совершенно не похожи на те, которые встречаются в обычных шахматах. Рассмотрим один несложный эндшпиль: белая пешка на а2, а черная на h6 (больше ничего на доске нет), белые начинают и проигрывают (а значит — выигрывают в поддавки).

На доске всего две пешки, но посмотрите, сколько тонкостей содержит позиция. 1. а2—а3! Но не а2—а4, так как белая пешка должна превратиться только после чер-



ной. 1... h6—h5 2. a3—a4 h5—h4 3. a4—a5 h4—h3 4. a5—a6 h3—h2 5. a6—a7 h2—h1! Именно ладья, при других превращениях черной пешки (в ферзя, слона и коня) белые ставят ферзя и либо сразу, либо на следующем ходу отдают его. 6. a7—a8C! Белая пешка превращается в еще более слабую фигуру, иначе черная ладья моментально встает под удар. Теперь на любой ее ход следует 7. Ca8—h1!, и белые избавляются от слона.

Рассмотрим еще одну позицию: у белых пешка на d7, а у черных конь на f5 (других фигур нет). Чем закончится игра в поддавки при ходе белых и при ходе черных?

Белые выигрывают в поддавки, независимо от очереди хода. Если ход их, то после превращения 1. d7—d8K! конь быстро приносит себя в жертву. Если первый ход делают черные, то на любой скачок их коня следует d7—d8C!, и слон без труда встает под удар коня.

*Задача X. Ключера и К. Фабелля.* Белый король на f3, а у черных две фигуры — король на d7 и ферзь на c8. Белые начинают и проигрывают (выигрывают в поддавки).

1. Kpe4! Фd8! (иначе белый король уже на втором ходу встанет под бой) 2. Kpd4!, и следующим ходом король кончает «самоубийством». Не проходит 1. Kpg4? Фаb! Теперь нельзя идти королем на f4, f5 и g5 (например, 2. Kpg5 Фf6! 3. Kp:f6 Кре6, и черные сами отдают обе фигуры), а другие ходы короля приводят к ничьей — черные «жертвуют» ферзя, после чего короли не могут приблизиться друг к другу.

Многочисленные математические игры и задачи возникают при переходе к другим шахматным доскам. Мы уже встречались с прямоугольными досками  $m \times n$  (в частности, квадратной  $n \times n$ ) при тех или иных значениях  $m$  и  $n$ , а также бесконечной шахматной доской. При желании большинство задач, упомянутых в книге, можно сформулировать и для этих досок. Сейчас мы рассмотрим шахматные игры на досках, получающихся из обычной при помощи более сложных математических преобразований.

*Проективные шахматы.* Правила игры в эти шахматы основываются на свойствах прямых, которые изучаются в проективной геометрии. В этой геометрии любое семейство параллельных прямых пересекается в некоторой бесконечно удаленной точке. Соответственно этому, ведем бесконечно удаленные поля бесконечной доски:

поле  $P_x$  есть пересечение ее горизонталей,  $P_y$  — вертикалей,  $P_1$  — диагоналей, параллельных  $a_1-h_8$ ,  $P_2$  — диагоналей, параллельных  $a_8-h_1$ . Проективная доска получается из бесконечной добавлением этих четырех полей  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ .

На проективной доске сохраняются многие правила обычных шахмат, а основное дополнение состоит в том, что дальнобойная фигура может переместиться на бесконечно удаленное поле (с учетом ее способа передвижения) и оттуда вернуться на конечное поле доски. Проективные шахматы особенно популярны среди югославских шахматных композиторов, много проективных задач

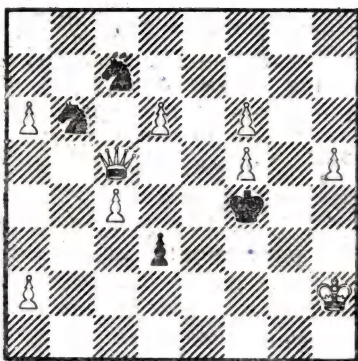


Рис. 67. *Н. Петрович*. Проективная шахматная доска. Белые начинают и дают мат в два хода

составлено Петровичем <sup>49</sup>. Рассмотрим одну из них (рис. 67).

Первый ход решения: **1. Kph2—g1!** Теперь у черного короля несколько ответов. Если он идет на e4, то мат дает белый ферзь, удаляясь в бесконечность через a5: **2. Фc5—Р<sub>x</sub> мат.** Действительно, с поля Р<sub>x</sub> ферзь нападает на черного короля и держит все поля вокруг него: e3, f3 — через h3; d4, e4, f4 — через h4; d5, e5, f5 — через a5. Ход **2. Фc5—Р<sub>x</sub>** матует и при **1... Kpf4—f3**. Поля e4, f4, g4 в этом случае ферзь держит через h4, e3, f3, g3 — через h3, а e2, f2, g2 — через h2 (белый король предусмотрительно ушел с h2).

<sup>49</sup> Подробнее с проективными шахматами можно ознакомиться в статье «Проективные шахматы» («Квант», 1974, № 3).

же при 1... d3—d2 матует 2. Фс5—Р<sub>1</sub> (ферзь уходит в бесконечность по диагонали с5—а3). Например, после 1... Kpf4—g5 2. Фс5—Р<sub>1</sub> поля f4, g5, h6 ферзь держит через с1, поле f6 — через а1, f5 — через h7, g4, h5 — через d1 и поле h4 — через e1.

Осталось рассмотреть ходы черных коней. На любой ход коня d6 следует 2. Фс5—Р<sub>2</sub> мат, а на любой ход коня с7—2. Фс5—Р<sub>у</sub> мат (в первом случае ферзь уходит в бесконечность через а7, а во втором через с8).

При решении разобранной задачи использовались все четыре бесконечно удаленных поля. Кстати, в начальном положении после 1.Фс5—Р<sub>х</sub> черный король скрывается на g5, а после 1.Фс5—Р<sub>1</sub> — на e4, с поля Р<sub>2</sub> ферзь даже не дает шаха, а хода Фс5—Р<sub>у</sub> и вовсе нет.

Все до сих пор рассмотренные нами доски, как и привычная шахматная доска, плоские. Остановимся теперь на некоторых пространственных досках.

**Объемные шахматы.** В них играют на трехмерной доске  $m \times n \times k$ . В гл. 5 были приведены маршруты коня по всем полям доски  $4 \times 4 \times 4$  и по поверхности доски  $8 \times 8 \times 8$ . Следующая, довольно сложная задача касается расстановки ладей на объемной доске  $n \times n \times n$ .

*Какое минимальное число ладей следует расставить на доске  $n \times n \times n$  так, чтобы они держали под угрозой все остальные поля доски?*

Фактически здесь требуется найти число «ладей-часовых», доминирующих на объемной доске  $n \times n \times n$ .

Оказывается, что оно равно  $n^2/2$  при четных  $n$  и  $\frac{n^2+1}{2}$  при нечетных<sup>50</sup>. В частности, для «охраны» доски  $8 \times 8 \times 8$  достаточно иметь 32 ладьи. Число независимых ладей на доске  $n \times n \times n$  равно  $n^2$  (но  $n$  ладей в каждом слое доски). На доске  $8 \times 8 \times 8$  удастся расставить 64 ладьи так, чтобы они не угрожали друг другу и в то же время держали под обстрелом все свободные поля доски. Наши задачи о доминировании и независимости ладей на доске  $n \times n \times n$  можно сформулировать следующим образом в терминах линейной алгебры.

Рассмотрим множество всех трехмерных векторов  $(t_1, t_2, t_3)$ , компоненты которых принимают одно из значений 1, 2, ...,  $n$  (всего таких векторов  $n^3$ ). Какое ми-

<sup>50</sup> Подробное обсуждение и решение этой задачи дано в статье Н. Васильева «Расстановка кубиков» («Квант», 1972, № 4).



нимальное число векторов следует выбрать из этого множества так, чтобы каждый из оставшихся векторов имел хотя бы с одним из выбранных не менее одной общей компоненты? Какое максимальное число векторов можно выбрать так, чтобы никакие два из них не имели ни одной общей компоненты?

Первый вопрос эквивалентен определению числа доминирования ладей на доске  $n \times n \times n$ , а второй — определению числа независимости. Таким образом, ответ такой: в первом случае  $\frac{n^2}{2}$  или  $\frac{n^2+1}{2}$  векторов, во втором случае —  $n^2$  векторов. Рассмотрение последней задачи наводит на мысль о следующем обобщении.

**Многомерные шахматы.** Полями доски для игры в такие шахматы являются многомерные кубики  $1 \times 1 \times \dots \times 1$ . В указанной терминологии наши задачи о ладьях можно обобщить для  $k$ -мерной шахматной доски.

Рассмотрим множество всех  $k$ -мерных векторов  $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ , компоненты которых принимают одно из значений  $1, 2, \dots, n$  (всего таких векторов  $n^k$ ). Какое минимальное число  $k$ -мерных векторов следует выбрать из этого множества так, чтобы каждый из оставшихся векторов имел хотя бы с одним из выбранных не менее одной общей компоненты? Какое максимальное число  $k$ -мерных векторов можно выбрать так, чтобы никакие два из них не имели ни одной общей компоненты?

Решение этой задачи неизвестно. Аналогичные задачи о доминировании и независимости на многомерных досках можно поставить и для других шахматных фигур. В упомянутой статье Васильева показана связь между задачами такого типа и некоторыми вопросами, возникающими в теории информации (в ее разделе, называемом кодированием).

**Цилиндрические шахматы.** Задачи на цилиндрических досках пользуются у шахматных композиторов особой популярностью. Из обычной шахматной доски можно соорудить, вообще говоря, две цилиндрические. Вертикальная цилиндрическая доска получается склеиванием вертикальных краев обычной доски (рис. 68, а), а горизонтальная — склеиванием горизонтальных краев (рис. 68, б). Интересно, что если при этом одну вертикаль (или, соответственно, горизонталь) вырезать, то на цилиндрической доске слон становится хамелеоном —

превращается из белопольного в чернопольного, и наоборот.

При переходе к цилиндрической доске некоторые задачи, имеющие решение на обычной доске, уже не удастся решить. Так, в главе 8 мы показали, что на ней невозможно расставить восемь не атакующих друг друга ферзей. Заметим, что на цилиндрической доске король с ладьей не всегда могут заматовать одинокого короля. С другой стороны, на цилиндрических досках открываются и новые возможности.

В задаче на рис. 69 на обычной доске все просто — 1. Ла5:а6 Крb1—с1 2. Ла6—а1 мат. Но на цилиндрической 1. Ла5:а6 не проходит, так как после 1... h7:а6! теряется ладья. Если же ладья уйдет с а5, то черные продвинут пешку а, и мата не будет. Что же делать? Оказывается, решает 1. Ла5—а5!! — ладья проходит по кругу

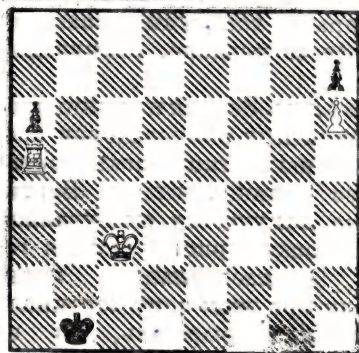
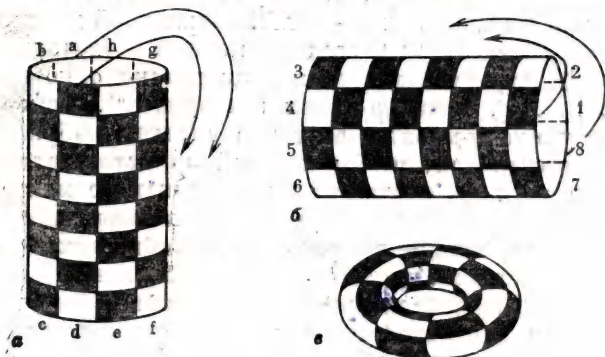


Рис. 68. Необычные шахматные доски

а — вертикальная цилиндрическая доска; б — горизонтальная цилиндрическая доска; в — тороидальная доска

←

Рис. 69. Белые начинают и дают мат в два хода

1) на обычной доске; 2) на вертикальной цилиндрической доске

и возвращается на исходное место! Дальнейшее просто:  
**1... Kpb1—c1 2. Ла5—a1 мат.**

Задача на рис. 70 примечательна тем, что в ней на каждой из трех досок (обычной и двух цилиндрических) имеется свое решение, которое не проходит в двух других случаях: а) **1. Фе2—e8 мат**; б) на вертикальном цилиндре **1. Фе8** не матует из-за ответа **1... Кра8—h7!**, а к цели ведет только **1. Фе2—g8 мат** (белый ферзь прошел по маршруту **e2—a6—h7—g8**); в) на горизонтальном цилиндре **1. Фе8** также ничего не дает, ввиду **1... Кра8—a1!**, а решает **1. Фе2—a2 мат!**

**Тороидальные шахматы.** Тороидальная доска

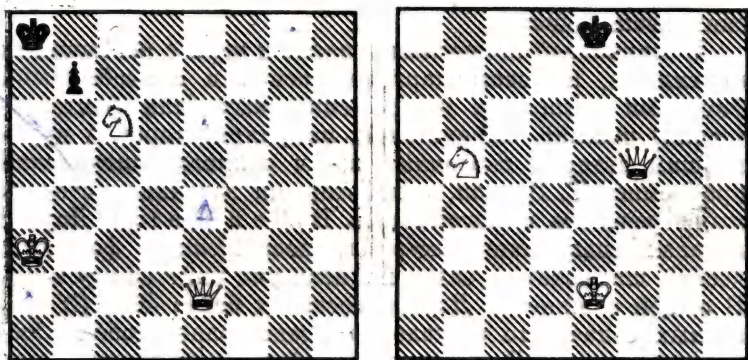


Рис. 70. Ф. Бондаренко. Белые дают мат в один ход

а — на обычной доске; б — на вертикальной цилиндрической доске; в — на горизонтальной цилиндрической доске

Рис. 71. З. Мах. Тороидальная доска. Белые начинают и дают мат в четыре хода

(рис. 68, в) получается в результате двойного склеивания краев обычной доски (см. стрелки на рис. 68, а, б). На такой доске одинокого короля не могут заматовать даже ферзь с королем — здесь просто нет ни одной матовой позиции.

Решим задачу на рис. 71. После **1. Фf5—h7!** в распоряжении черных имеется два ответа: а) **1... Кре8—f8** (поля d1, e1 и f1 контролирует белый король с e2 — на торе действуют правила горизонтального цилиндра!) **2. Фh7—g6 Kpf8—e7 3. Кре2—e1 Кре7—d7** (поля d8 и f8 держит белый король с e1) **4. Фg6—e8 мат!**; б) **1... Кре8—d8 2. Фh7—c7+Kpd8—e8 3. Kb5—h6!** (конь идет по



тору, как по вертикальному цилиндру!) 3... Кре8—f8 4. Фс7—e1 мат! (поля f7 и g8 держит белый конь, а остальные — ферзь).

Этот перечень шахматных игр на различных досках, получающихся из обычной при помощи геометрических преобразований, можно продолжить и дальше. Существуют доски для игры вдвое на вдвое (на них играют в так называемые четверные шахматы) и «на троих» (здесь победителем становится тот, кто съедает обоих королей противников). При желании можно соорудить также сферическую и конусоидальную доски. Забавная доска — шаровидной формы — изображена на обложке книги. Как экспозиция она участвовала на выставке французских авангардистов.

В шахматной композиции задачи и игры с необычными правилами, на нестандартных досках и с необычными фигурами относят к жанру сказочных (или фантастических) шахмат. Основателем, популяризатором и крупнейшим автором сказочных задач является английский проблемист Т. Доусон, с некоторыми задачами которого мы встречались в нашей книге. В 30-е и 40-е годы Доусон издавал специальный журнал, посвященный фантастическим шахматам, а затем написал ряд книг на эту тему. В общей сложности Доусон составил более 4000 (!) сказочных задач, что безусловно представляет собой абсолютный рекорд. Большинство идей этого увлекательного шахматного жанра содержится в замечательной книге А. Дикинса «Путеводитель по сказочным шахматам»<sup>51</sup>.

Мы уже рассказали о некоторых шахматных играх с необычными правилами, а также перечислили ряд необычных досок. Остановимся теперь на сказочных фигурах, получивших наибольшую популярность.

Ряд сказочных персонажей возникает при комбинировании обычных ходов ладьи, слона и коня. Возможны четыре комбинации: ладья + слон, ладья + конь, слон + конь, ладья + слон + конь. В первом случае мы получаем настоящую шахматную фигуру — ферзя. Фигура, объединяющая ходы ладьи и коня, называется канцлером, а слона и коня — кентавром. Кентавр в общем случае сильнее ладьи, но, как было показано в гл. 10, есть доски, на которых их силы равны. И наконец, фигу-

<sup>51</sup> A. Dickins, A. Guide to Fairy Chess, Richmond, 1969.

ра, которая ходит, как ладья, слон и конь одновременно, называется магараджей, или амазонкой (о ней уже шла речь в гл. 8). Это очень мощная фигура, которая намного сильнее ферзя. Следующая игра носит то же название, что и сама сказочная фигура.

**Магараджа.** У одного игрока — полный комплект фигур, стоящих на первоначальных местах, а у другого — лишь один магараджа, которого он ставит на произвольное поле. Магараджа проигрывает, если его удастся взять, и выигрывает, если ставит мат неприятельскому королю.

В этой игре пешкам запрещено превращаться, так как в противном случае выигрыш слишком прост — достаточно провести обе крайние пешки в ферзей, после чего три ферзя и две ладьи без труда окружают магараджу. При сделанной оговорке магараджа оказывает упорное сопротивление, а у неопытного игрока быстро выигрывает (здесь имеет место та же ситуация, что и в борьбе полного комплекта фигур против короля и пешек, делающих по два хода). И все же у того, кто играет полным комплектом фигур, имеется форсированный выигрыш. Гарднер предлагает план окружения магараджи, состоящий из 25 ходов. Однако цель достигается, по крайней мере, десятью ходами раньше!

Не обращая внимания на перемещения магараджи, белые делают следующие 14 ходов подряд: 1—14.  $a4$ ,  $h4$ ,  $La3$ ,  $Lb3$ ,  $Kc3$ ,  $Kf3$ ,  $Lb3$ ,  $Lg3$ ,  $d4$ ,  $Fd3$ ,  $Fe4$ ,  $Lb7$ ,  $Fd5$ ,  $Lg8$ . Легко проверить, что при этих ходах магараджа не мог дать мат или взять белую фигуру. Теперь у него имеются лишь два свободных поля —  $ab$  и  $f6$ : на  $ab$  он гибнет после 15.  $Sg5$ , а на  $f6$  — после 15.  $e4$ .

Различные сказочные фигуры получаются из «обобщенного коня» ( $a$ ,  $b$ ) при выборе тех или иных значений  $a$ ,  $b$  (см. гл. 4). Конь (1, 3) называется верблюдом, (1, 4) — жирафом, (2, 3) — зеброй. Если одно из чисел  $a$ ,  $b$  равно нулю, то мы получаем ладью, перемещающуюся на фиксированное число полей. Если же  $a = b$ , то имеем слона, обладающего тем же свойством. Коню, который за один ход делает несколько скачков подряд, присваивается «звание» всадника. Интересной игре, в которой одной и той же фигурой ходят и как конем, и как верблюдом, посвящена следующая задача.

*В углу доски  $n \times n$  ( $n \geq 4$ ) стоит фигура. Двое ходят по очереди. Один играет этой фигурой, как обычным ко-*

нем, но с двойным ходом, а второй — как верблюдом. Первый стремится к тому, чтобы поставить фигуру в противоположный угол доски, а второй — ему помешать. Чем закончится игра?

В этом, несколько странном соперничестве коня и верблюда (а точнее было бы сказать: хамелеона, превращающегося то в одну фигуру, то в другую) победителем выходит конь! Это вытекает из следующего соображения. Если наша фигура стоит на диагонали, проходящей через исходное угловое поле доски, то на любое отступление верблюда с диагонали конь возвращается на нее, причем продвигается, по крайней мере, на одно поле ближе к цели, а то и сразу попадает в нужный угол.

Следующая игра и задачи к ней были предложены на Всесоюзной олимпиаде школьников (Ереван, 1974 г.).

**Кошки-мышки.** У одного игрока одна фигура — мышка, у второго несколько фигур — кошек. Мышка и кошки ходят одинаково — на одно поле по вертикали или горизонтали (т. е. они получают из коня (а, б) при  $a = 0$ ,  $b = 1$ ). Если мышка оказалась на краю доски, то очередным ходом она спрыгивает с доски и убегает от кошек; если кошка и мышка попадают на одно поле, то кошка съедает мышку.

Игра идет на шахматной доске, причем играющие ходят по очереди, и второй из них передвигает одним ходом всех своих кошек сразу (в любых направлениях). Начинает мышка. Она старается спрыгнуть с доски, а кошки хотят до этого ее съесть.

а. Пусть кошек всего две, а мышка стоит не на крайнем поле доски. Можно ли так поставить кошек на краю доски, чтобы они сумели съесть мышку?

б. Пусть кошек три, но зато мышка в первый раз делает два хода подряд. Доказать, что мышка убежит от кошек, как бы ни были вначале расставлены фигуры.

Решения: а. Через поле, на котором стоит мышка, проведем диагональ и поставим кошек на ее концы. После хода мышки кошки должны пойти так, чтобы все три фигуры снова оказались на одной диагонали, а расстояние между кошками сократилось на одно поле (по диагонали). Такая стратегия позволит кошкам съесть мышку.

б. Проведем через поле, на котором стоит мышка, обе диагонали доски. Если поле не крайнее (а в противном случае мышка сразу спрыгивает с доски), то эти диагонали



разбивают доску на четыре части. Поскольку кошек три, то внутри одной из частей их нет. Проведем отрезок (горизонтальный или вертикальный), соединяющий мышку с краем доски внутри этой части. Нетрудно видеть, что если мышка отправится прямо по этому отрезку к краю доски, то кошкам ее не догнать.

Можно придумать еще множество игр и задач с участием сказочных фигур. Большинство упомянутых в книге тем легко переносится и на такие фигуры. О необычных правилах игры, нестандартных досках и сказочных фигурах мы уже рассказали достаточно подробно. В следующей игре, которую придумал Голомб<sup>52</sup>, используются сразу все эти необычные элементы.

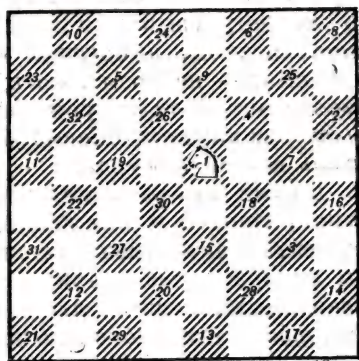


Рис. 72. Две задачи на шахматной доске

**Шашматы.** В этой игре, представляющей собой смесь шахмат и шашек (по-английски: chess + checkers = cheskers), шахматные фигуры ходят по черным полям доски (как в шашках). Обычный конь (1, 2) не в состоянии здесь сделать ни одного хода (он сразу же попадает на запрещенное белое поле), и его следует заменить верблюдом (1, 3), который перемещается по полям одного цвета.

На рис. 72 последовательно занумерованы поля маршрута, который верблюд проходит по всем полям «шахматной» доски, причем этот маршрут замкнутый.

Как мы знаем, на шахматной доске можно расставить максимум 32 коня, не угрожающих друг другу. Максимальное число «мирных» верблюдов равно 16, т. е. они также могут занять половину всей доски (шахматной).

<sup>52</sup> S. Golomb. Of Knights and Cooks, and the Game of Cheskers. — «J. Recreat. Math.», 1968, N 1.

На рис. 72 их можно поставить на поля со всеми четными или со всеми нечетными числами. Таким образом, этот рисунок дает решение сразу двух задач на шашматной доске. Более подробный рассказ о шашматах (в частности, расстановку фигур перед началом игры) можно найти у Гарднера.

В заключение главы — еще о нескольких сказочных фигурах, которые вообще уже ни на что не похожи!

Сверчок ходит, как ферзь, и перепрыгивает через свои и чужие фигуры, останавливаясь сразу вслед за ними. Лев, в отличие от сверчка, приземляется на любом поле за перепрыгнутой фигурой.

Существуют нейтральные фигуры, которыми могут играть и белые, и черные. Фигура, которая делает ход только со взятием; называется бьющей. Бьющий конь называется гиппопотамом, а бьющий ферзь — динозавром. Фигура дипломат — не ходит, но и ее нельзя брать. Мало того, около дипломата фигуры того же цвета неприкосновенны! А фигура камикадзе (самоубийца) убивается с доски вместе со взятой фигурой!

До сих пор речь шла исключительно о сказочных фигурах. Однако и для пешек существует много разновидностей. Пешка-хамелеон при взятии неприятельской фигуры превращается в такую же фигуру, но своего цвета. Сверхпешка ходит на любое число полей по прямой и бьет на любое число полей по диагонали. Пешка-такси ходит и вперед, и назад. Наконец, один раз в партии пешке можно разрешить превращение в «атомную бомбу»! Эта фигура сразу же после появления ставится на любое поле доски и в заданном радиусе уничтожает все вокруг себя.

## Глава 14

### СИСТЕМА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Хотя темы двух последних глав не имеют прямого отношения к математике на самой шахматной доске, их включение в книгу оправдано тем, что именно существованию матчей и турниров шахматы обязаны своей популярностью. В настоящей главе мы ознакомимся с систе-

мами индивидуальных коэффициентов (в том числе с системой Эло), широко используемых ныне для оценки и прогноза результатов шахматистов в турнирах. В последней главе книги будут рассмотрены некоторые математические свойства систем, по которым проводятся шахматные турниры.

В те далекие времена, когда в шахматных турнирах выступало всего несколько десятков мастеров, а сами турниры проходили не чаще одного-двух раз в год, сравнивать результаты шахматистов было совсем не трудно. Вопрос, кто из двух мастеров играет сильнее, решался просто — на протяжении какого-то отрезка времени они встречались между собой в турнирах, и если один регулярно опережал другого, значит он и был сильнее; если же впереди оказывался то один, то другой, можно было предположить, что их сила примерно одинакова; в особо спорных случаях возникала идея провести между ними матч.

Сейчас шахматные турниры играют в нескольких странах и даже городах одной страны одновременно. Круг участников только международных квалификационных соревнований (т. е. таких, в которых присваиваются международные звания) составляет добрую тысячу шахматистов, из которых многие знают друг о друге лишь понаслышке. В таких условиях сравнивать силу мастеров стало куда труднее. Впрочем, количественная оценка силы шахматного мастера — дело нереальное, поскольку не совсем ясно, из каких компонент она складывается. Речь может идти только об оценке результатов, показанных им в турнирах.

Первые попытки построить систему таких оценок относятся к началу нашего века. А в конце 50-х годов начались практические испытания нескольких систем, основанных на том, что каждому шахматисту присваивается меняющийся от турнира к турниру индивидуальный коэффициент («рейтинг», от английского слова rating — оценка), вычисленный по определенной формуле и зависящий от коэффициентов противников и показанного результата.

Если шахматист впервые попадает в турнир, на который распространяется данная система, то он получает некоторый начальный коэффициент  $K_0$ . В дальнейшем после каждого соревнования коэффициент пересчитывается. Для этого прежде всего определяется ожидаемое



число очков  $N_{\text{ож}}$ , которое шахматист должен набрать для сохранения своего «старого» коэффициента  $K_{\text{ст}}$  (до начала турнира). «Новый» коэффициент  $K_{\text{нов}}$  (после окончания турнира) вычисляется по такой формуле:

$$K_{\text{нов}} = K_{\text{ст}} + \alpha (N - N_{\text{ож}}),$$

где  $N$  — число набранных очков, а  $\alpha$  — «цена» одного очка в системе (в некоторых системах подобная формула имеет более сложный, нелинейный вид). Разумеется, если  $N > N_{\text{ож}}$ , то рейтинг возрастает, а если  $N < N_{\text{ож}}$ , то убывает.

Долгое время применение системы коэффициентов вызывало бурные дискуссии, причем высказывались самые противоречивые точки зрения. К ее достоинствам следует отнести возможность следить за ростом шахматистов, распределять участников по соревнованиям, устанавливать нормы для получения и подтверждения званий и т. д. Конечно, система индивидуальных коэффициентов не отражает творческой стороны дела, а учитывает только спортивные успехи. Впрочем, практика показывает, что результаты шахматиста и его творческие достижения, как правило, тесно связаны.

Когда шахматисты смирились, наконец, с математическим подходом к оценке их результатов, разгорелись новые споры, уже относительно того, какая система лучше. Были предложены различные системы, отличающиеся друг от друга начальным рейтингом  $K_0$ , способом вычисления  $N_{\text{ож}}$ ,  $K_{\text{нов}}$ ,  $\alpha$  и др.

В 1970 г. Международная шахматная федерация (ФИДЕ) приняла систему квалификации, основанную на индивидуальных коэффициентах американского профессора математики А. Эло.

Основываясь на своей системе, Эло проделал ряд любопытных экспериментов. В частности, он рассчитал коэффициенты всех крупнейших шахматистов со времен Морфи. В 1963 г. в американском журнале «Чесс лайф» он опубликовал результаты своих расчетов, которые не лишены интереса. Для каждого «классика» шахмат Эло вычислил рейтинг, характеризующий результат его выступлений на «наилучшем» отрезке длиной в 5 лет. К 1963 г. лидерами в списке Эло (рейтинг 2600 и выше), если взять средние значения для выбранных отрезков времени, были 28 шахматистов (табл. 4).

Может вызвать недоумение сравнительно низкий коэффициент Алехина (он вычислен по результатам 1927—1932 гг.). Сам Эло тут, конечно, не виноват — он не мог «украсть» у Алехина ни одного очка. Виновата система — для каждого конкретного случая она не может давать стопроцентно верный результат, все ее оценки находятся в некотором «доверительном интервале». Это свойство характерно для любой подобной системы. Сопоставляя цифры «исторического» списка Эло, не нужно забывать, что они не могут применяться для сравнения уровня силы сильнейших шахматистов разных эпох. Они лишь показывают, что коэффициенты Эло устойчиво ведут себя во времени и, следовательно, могут быть положены в основу квалификационной системы без необходимости ее частого пересмотра.

В табл. 5 указаны гроссмейстеры, имеющие на 1 января 1976 г. рейтинг 2600 и выше. (После завоевания звания чемпиона мира наивысший рейтинг имел Р. Фишер — 2780. Но поскольку, по правилам ФИДЕ, шахматист, не выступающий в соревнованиях три года, автоматически лишается рейтинга, в этой таблице американский гроссмейстер отсутствует.) Свои официальные списки коэффициентов (рейтинг-листы) ФИДЕ публикует два раза в год, причем для их составления и контроля используется ЭВМ.

Покажем теперь, как рассчитать коэффициенты Эло для конкретного соревнования. В основе расчета лежит приведенная выше формула, которая связывает коэффициенты  $K_{ст}$  и  $K_{нов}$ . В системе Эло  $\alpha = 10$ , а  $K_0 = 2200$  (параметр  $\alpha$  меняется, вообще говоря, в некотором диапазоне, но для турниров с равным составом его можно считать постоянным). Для нахождения  $N_{ож}$  следует воспользоваться табл. 6. В случае матча  $\Delta k$  в таблице равно разности между бóльшим и меньшим коэффициентами партнеров, при этом значения  $h_б$  и  $h_м$ , определяемые по  $\Delta k$ , есть проценты очков, которые должен набрать, соответственно, фаворит и его соперник. В случае турнира  $\Delta k$  равно разности (взятой со знаком  $+$ ) между рейтингом данного участника и средним рейтингом его противников, при этом прогнозируемый процент равен  $h_б$ , если его коэффициент выше среднего, и равен  $h_м$ , если ниже. Очевидно, если  $\Delta k = 0$ , то  $h_б = h_м = 50\%$ . Для определения  $\Delta k$  можно воспользоваться общей формулой:

Таблица 4

Эм. Ласкер, Х. Р. Капабланка, М. Ботвинник	2720
М. Таль	2700
П. Морфи (за три года выступлений)	2690
А. Алехин, В. Смыслов	2680
Д. Бронштейн, П. Керес	2670
С. Решевский, Р. Файн	2660
В. Стейниц, И. Болеславский, М. Найдорф	2650
А. Рубинштейн, М. Эйве, С. Глигорич	2640
С. Флор, А. Котов	2620
З. Тарраш, Г. Мароци, А. Нимцович, Е. Боголюбов	2610
А. Андерсен, Г. Пильсбери, М. Видмар, Г. Штальберг, Л. Сабо	2600

Таблица 5

А. Карпов (СССР)	2695
Т. Петросян и Л. Полугаевский (оба — СССР)	2635
Б. Спасский (СССР)	2630
Б. Ларсен (Дания) и Л. Портиш (Венгрия)	2625
Е. Геллер (СССР), Л. Любоевич (Югославия) и Э. Мекинг (Бразилия)	2620
Я. Смейкал (Чехословакия) и М. Таль (СССР)	2615
В. Горт (Чехословакия)	2600

$$\Delta k = \frac{n}{n-1} |K_{\text{ст}} - K_{\text{т}}|,$$

где  $K_{\text{т}}$  — уже средний коэффициент всех участников соревнования, включая и того, для которого ведется расчет. При  $n = 2$  (матч) имеем  $\Delta k = 2|K_{\text{ст}} - K_{\text{т}}|$ , а при больших  $n$  (турнир)  $\Delta k \approx |K_{\text{ст}} - K_{\text{т}}|$ .

Один из недостатков системы Эло связан с возникновением в ней некоторых парадоксов. Пусть, например, двое играют матч без ограничения числа партий, причем один набирает чуть больший процент очков, чем «положено» по Эло, а другой — чуть меньший. Тогда рейтинг первого неограниченно растет, а рейтинг второго неограниченно падает. Если бы пересчет коэффициентов производился после каждой партии, то в нашем примере они быстро стабилизировались бы и ничего парадоксального



Таблица 6

$\Delta k$	$h_{\bar{6}}$	$h_M$	$\Delta k$	$h_{\bar{6}}$	$h_M$	$\Delta k$	$h_{\bar{6}}$	$h_M$
0—3	50	50	122—129	67	33	279—290	84	16
4—10	51	49	130—137	68	32	291—302	85	15
11—17	52	48	138—145	69	31	303—315	86	14
18—25	53	47	146—153	70	30	316—328	87	13
26—32	54	46	154—162	71	29	329—344	88	12
33—39	55	45	163—170	72	28	345—357	89	11
40—46	56	44	171—179	73	27	358—374	90	10
47—53	57	43	180—188	74	26	375—391	91	9
54—61	58	42	189—197	75	25	392—411	92	8
62—68	59	41	198—206	76	24	412—432	93	7
69—76	60	40	207—215	77	23	433—456	94	6
77—83	61	39	216—225	78	22	457—484	95	5
84—91	62	38	226—235	79	21	485—517	96	4
92—98	63	37	236—245	80	20	518—559	97	3
99—106	64	36	246—256	81	19	560—619	98	2
107—113	65	35	257—267	82	18	620—735	99	1
114—121	66	34	268—278	83	17	свыше 735	100	0

не произошло. Разумеется, такой частый пересчет рейтинга мало удобен. Впрочем, если число партий в матче или турнире не превосходит 20—25 (а практически больше и не бывает), то никаких недоразумений не случится.<sup>53</sup>

<sup>53</sup> В. Арлазаров и А. Битман предложили систему коэффициентов («Новая формула оценки». — Еженедельник «64», 1971, № 10), в которой парадоксы вообще не возникают, но она заметно сложнее, чем система Эло.

## МАТЕМАТИКА ШАХМАТНЫХ ТУРНИРОВ

Среди систем, по которым проводятся шахматные соревнования, наиболее распространены следующие: олимпийская, швейцарская, круговая, матчевая, схевенингенская<sup>54</sup>, и каждая из них имеет свои математические особенности.

В турнирах, проводимых по олимпийской, или кубковой, системе проигравшие сразу выбывают из борьбы, и поэтому элемент случайности здесь наиболее велик. Такая система хороша для тех, кто любит играть по принципу «или все, или ничего».

В кубках как бы считается, что если шахматист  $A$  играет сильнее  $B$ , а  $B$ , в свою очередь, сильнее  $B$ , то и  $A$  играет сильнее  $B$ , т. е. что отношение между силой шахматистов, как говорят математики, транзитивно. Однако на практике дело обстоит далеко не так. Например, чемпион мира Ласкер постоянно выигрывал у Чигорина, Чигорин побеждал Пильсбери, а Пильсбери имел перевес в счете с Ласкером. А вот пример аналогичного нарушения транзитивности для современных шахматистов: Фишер имеет перевес в личных встречах с Ларсеном, Ларсен — с Геллером, а у Геллера перевес в счете против Фишера. Из сказанного, в частности, следует, какую большую роль в кубке играет жребий...

Если все же считать, что транзитивность имеет место, то возникают интересные математические задачи. Они связаны главным образом с нахождением минимального числа партий, необходимых для определения одного или нескольких победителей кубкового турнира. Вот простейшая задача такого типа<sup>55</sup>.

*В розыгрыше кубка города участвуют  $n$  шахматистов. Предварительно проводятся кубки районов, и победители уже разыгрывают главный кубок (противники играют по одной партии, и при ничьей белые выбывают). Сколько*

<sup>54</sup> От названия голландского города Схевенинген; в шахматной литературе эту систему часто (хотя и не точно) называют шевенингенской, или, кратко, шевенинген.

<sup>55</sup> Исчерпывающее решение ряда таких задач приведено в журнале «Квант», 1972, № 8.

партий нужно сыграть, чтобы определить обладателя кубка города, если в нем  $p$  районов с числом шахматистов  $n_1, n_2, \dots, n_p$ ?

Для решения задачи достаточно заметить, что после каждой партии из борьбы выбывает ровно один участник. Так как в конце концов из  $n$  шахматистов, разыгрывающих кубок, выбывают  $(n - 1)$  — все, кроме победителя, то всего будет сыграна  $(n - 1)$  партия. Таким образом, ответ не зависит ни от числа районов в городе, ни от распределения шахматистов в них.

Преимущество олимпийской системы заключается в большом числе шахматистов, которые могут одновременно играть в турнире (точнее, начать его). Тем же достоинством обладает и швейцарская система, которая имеет еще один плюс — проигравшие здесь не выбывают. Эта система обычно применяется в турнирах с числом участников, большим 20. При этом 10—13 туров, как правило, хватает, чтобы определить достойных победителей. Напомним, например, что XXXV юбилейный чемпионат страны (Харьков, 1967 г.) проходил по швейцарской системе; в нем играло 130 шахматистов (в 13 туров), и чемпионами стали М. Таль и Л. Полугаевский.

Перед началом турнира по швейцарской системе проводится жеребьевка. В первом туре встречаются номера 1 и 2, 3 и 4 и т. д., причем нечетные номера играют белыми. В последующих турах, опять же по жребью, между собой играют участники, имеющие одинаковое количество очков. Если в одной «очковой» группе число участников нечетно или их не удастся разбить на пары так, чтобы партнеры каждой пары встречались впервые, то «смешивают» соседние группы. При жеребьевке стремятся к тому, чтобы участники чередовали цвет фигур.

Самая распространенная и объективная система проведения шахматных соревнований — круговая, при которой все участники турнира встречаются друг с другом. Иногда, чтобы элемент случайности свести к минимуму, турнир проводят в два или даже большее число кругов. Порядок встреч по турам и цвет фигур, которым играют шахматисты в круговом турнире, зависит только от номеров его участников (получаемых ими при жеребьевке) и указывается в специальных таблицах, составленных немецким шахматистом И. Бергером. Несложный математический анализ этих таблиц позволяет вывести про-



стые правила для нахождения номера тура, в котором встречаются противники, и цвета их фигур. Укажем эти правила для турнира с четным числом участников  $n$ .

Если номера обоих участников отличны от  $n$ , то сложим их. Номер тура получается при вычитании из этой суммы 1, если она не превосходит  $n$ , и вычитании  $n$ , если она больше  $n$ . Если сумма нечетна, то белыми играет меньший номер, а если четна, то — больший. Например, при десяти участниках второй номер с пятым играет белыми в 6-м туре ( $2 + 5 = 7$  — нечетное число, меньше 10;  $7 - 1 = 6$ ), а шестой номер с восьмым играет черными в 4-м туре ( $6 + 8 = 14$  — четное число, больше 10;  $14 - 10 = 4$ ).

Расписание встреч последнего номера отличается от остальных. Чтобы узнать, в каком туре он играет с данным участником, удвоим номер этого участника. Теперь из результата надо вычесть 1, если он не больше  $n$ , и вычесть  $n$ , если больше. При этом с первой половиной номеров последний участник играет черными, а со второй — белыми.

Если число участников  $n$  нечетно, то добавлением «фиктивного» участника с номером  $n + 1$  мы перейдем к уже разобранным случаю. При этом встреча с «фиктивным» партнером попросту означает, что в соответствующем туре шахматист свободен от игры. При четном  $n$  участники первой половины турнирной таблицы играют на одну партию белыми больше (за счет «белой» партии с последним номером), и поэтому при жеребьевке шахматисты предпочитают вытягивать номера от 1 до  $n/2$ .

По круговой системе проводятся не только шахматные турниры; используют ее и в соревнованиях по другим видам спорта, например по футболу. Но такое математически строгое расписание игр по турам применяется, пожалуй, только в шахматах (и шашках). Это объясняется тем, что шахматные соревнования проходят компактно, в сжатые сроки (конечно, это не касается турниров по переписке, в которых все партии вообще играют одновременно и могут продолжаться не один год). При составлении календаря игр в футбольном чемпионате страны приходится учитывать международные матчи, считаться с погодой, климатом и т. д.

Всякий закончившийся круговой турнир полностью характеризуется графом, вершины которого соответст-

вуют участникам турнира, а ребра — встречам между ними. Такой граф содержит  $n$  вершин и  $C_n^2$  ребер и называется полным. Если партия результативна, то соответствующему ребру можно приписать стрелку, направленную от победителя к побежденному. Графы такого типа (и их обобщения) называются графами турниров, их исследованию посвящено довольно много серьезных работ.

О круговых турнирах составлено множество математических и логических задач. Конечно, в их формулировке можно использовать различные виды спорта, но предпочтение почти всегда отдается шахматам. Рассмотрим несколько таких задач.

*Всего в круговом турнире было сыграно 55 партий. Два участника выбыли из него, один успел сыграть 10 партий, а другой — одну. Встречались ли эти шахматисты между собой?*

Пусть  $n$  — число участников турнира, тогда  $(n - 2)$  шахматиста, закончившие турнир, сыграли между собой  $\frac{(n - 2)(n - 3)}{2}$  партий. А два интересующих нас шахматиста провели 10 или 11 встреч — в зависимости от того, сыграли между собой или нет. Таким образом, надо рассмотреть два квадратных уравнения:

$$\frac{(n - 2)(n - 3)}{2} + 10 = 55 \text{ и } \frac{(n - 2)(n - 3)}{2} + 11 = 55.$$

При этом нас интересуют лишь целые и положительные значения  $n$ . Такое решение ( $n = 12$ ) имеет лишь первое уравнение, откуда и следует, что указанная партия состоялась.

*Для тренировки шахматист играет не менее одной партии в день и, чтобы не переутомиться, не более 12 партий в неделю. Доказать, что можно найти несколько дней подряд, в течение которых он сыграет ровно 20 партий.*

Так как шахматист играет не более 12 партий в неделю, то за 77 дней он проведет не более 132 встреч. Пусть  $a_i$  — число партий, сыгранных им за  $i$  дней, начиная с первого. Поскольку каждый день играет хотя бы одна партия, то среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{77}$  нет равных, причем  $a_{77} \leq 132$ . Осталось убедиться, что среди этих чисел найдется хотя бы одна пара таких, разность между которыми равна 20. Если это не так, то среди следующих 153 чисел:  $a_1, a_2, \dots$

... ,  $a_{77}$ ,  $a_1 + 20$ , ... ,  $a_{76} + 20$  также нет равных. Это означает, что  $a_{76} + 20 \geq 153$ , т. е.  $a_{77} > a_{76} \geq 133$  — противоречие. По существу, мы здесь использовали так называемый принцип Дирихле, утверждающий, что если в каждую клетку сажать не более одного зайца, то разместить шесть зайцев в пяти клетках невозможно.

*В турнире играло  $n$  шахматистов — гроссмейстеров и мастеров. После его окончания оказалось, что каждый участник половине очков набрал, играя с мастерами. Доказать, что  $\sqrt{n}$  — целое число.*

Пусть  $a$  — число мастеров, а  $b$  — гроссмейстеров. Мастера между собой разыграли  $a(a-1)/2$  очков, а так как это половина всех их очков, то столько же они набрали с гроссмейстерами. Аналогично гроссмейстеры, как между собой, так и с мастерами, набрали  $b(b-1)/2$  очков. Из того, что число партий между старшим и младшими по званию равно  $ab$ , получаем

$$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} = ab$$

или, после упрощений,  $a + b = (a - b)^2$ . Так как  $n = a + b$ , то  $\sqrt{n} = \sqrt{a + b} = |a - b|$  — целое число, что и требовалось доказать.

*Доказать, что по окончании кругового турнира всех его участников можно занумеровать так, чтобы ни один из них не имел поражения от участника со следующим номером.*

Воспользуемся методом математической индукции. Для двух участников утверждение очевидно. Предположим теперь, что оно верно для произвольного турнира с  $k$  участниками. Покажем, что в этом случае в требуемом порядке можно расположить и  $k + 1$  участников. Расположим нужным образом произвольных  $k$  из них (по предположению это можно сделать) и посмотрим, как  $(k + 1)$ -й сыграл с первым. Если он выиграл или сыграл вничью, то поставим его на первое место, а если проиграл, то посмотрим, как он сыграл со вторым и т. д. Если мы в конце концов найдем среди упорядоченных  $k$  участников такого, у которого  $(k + 1)$ -й выиграл (а предыдущему проиграл), то поставим  $(k + 1)$ -го перед ним, в противном случае поставим его на последнее место. В результате все  $k + 1$  участника будут расположены в необходимом порядке.



Среди матчевых систем с математической точки зрения наиболее интересна схевенингенская, на которой мы сейчас и остановимся. В турнире по «схевенингену» встречаются две команды, и каждый участник одной из них играет с каждым участником другой. Таким образом, наряду с основным матчем удастся провести также интересный личный турнир (и поэтому эта система, по существу, является матч-турнирной).

Пусть каждая команда состоит из  $n$  шахматистов. В этом случае схевенингенский турнир продолжается ровно  $n$  туров. Для  $n = 6$  возможное расписание турнира представлено на рис. 73, причем оно легко обобщается для

II	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	3	4	1	6	5	2
4	4	3	6	1	2	5
5	5	6	2	5	1	3
6	6	5	3	2	4	1

Рис. 73. Расписание игр для схевенингенского турнира

любого  $n$ . Здесь строки таблицы соответствуют участникам первой команды, а столбцы — участникам второй. Номер тура,  $p$  котором играют между собой данные противники, стоит в клетке, лежащей на пересечении соответствующей строки и столбца, а цвет фигур (участников первой команды) определяется цветом этой клетки.

Каждый столбец и каждая строка квадрата, выделенного на рис. 73, содержат все числа от 1 до 6, расположенные в том или ином порядке. В общем случае строки и столбцы квадрата содержат все числа от 1 до  $n$ . Такой квадрат в комбинаторном анализе называется латинским квадратом порядка  $n$ . (Эйлер, который исследовал эти квадраты, вместо чисел пользовался латинскими буквами, чем и объясняется название таких квадратов.) Ясно, что всякий латинский квадрат порядка  $n$ , клетки которого окрашены в черно-белый цвет, дает некоторое расписание схевенингенского турнира для двух команд, состоящих из  $n$  шахматистов.

В расписании на рис. 73 все шахматисты играют одинаковое число партий белыми и черными, что само по себе хорошо. В то же время обе команды здесь в каждом туре все партии играют одним цветом, и это нельзя признать удачным, так как команда, играющая белыми, имеет явное преимущество.

Организаторы товарищеского матча СССР — Югославия, состоявшегося в 1970 г., попытались найти расписание (для мужских команд, состоящих из шести человек каждая), удовлетворяющее сразу трем следующим, довольно естественным, условиям:

1) все шахматисты играют одинаковое число партий белыми и черными;

2) в каждом туре участники обеих команд играют одинаковое число партий белыми и черными;

3) все шахматисты в каждом туре меняют цвет фигур.

В общем случае задача состоит в нахождении тех значений  $n$ , при которых существует расписание «схевенингена», удовлетворяющее этим трем условиям.

Очевидно, следует рассматривать только четные  $n$ , так как в противном случае одновременно нарушаются первые два условия.

Если все участники команды в каждом туре играют одним цветом (как в расписании на рис. 73), то условие 3) выполняется, а условие 2) — нет. Однако условия 2) и 3) одновременно выполняться не могут. Действительно, если имеет место условие 2), то найдутся хотя бы два представителя разных команд, которые уже в первом туре играют одним цветом. Так как по условию 3) эти шахматисты в каждом туре должны менять цвет фигур, то они до конца турнира не встретятся между собой!

Будем считать условие 2) более важным и ради него откажемся от условия 3) (организаторы упомянутого матча именно так и поступили). Теперь надо выяснить, существует ли расписание схевенингенского турнира, удовлетворяющее только первым двум условиям. Перед началом матча СССР — Югославия организаторы попытались найти такое расписание, но у них ничего не вышло.

Предположим, что клетки некоторого латинского квадрата порядка  $n$  можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы одновременно выполнялись следующие два условия:

а) в каждом столбце и в каждой строке квадрата содержится одинаковое число белых и черных клеток;

б) половина всех клеток квадрата, в которых записано одно и то же число (любое), окрашена в белый цвет, а половина — в черный.

Раскрашенный указанным образом латинский квадрат дает расписание «схевенингена», удовлетворяющее условиям 1) и 2) — для команд, состоящих из  $n$  шахматистов. Действительно, из а) непосредственно следует справедливость условия 1), а из б) — условия 2).

Итак, возникает следующая чисто математическая задача, эквивалентная нашей задаче о составлении расписания.

*При каких  $n$  (четных) существует латинский квадрат порядка  $n$ , клетки которого можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы одновременно выполнялись условия а) и б)?*

Введем еще одно понятие, связанное с латинскими квадратами. При наложении одного такого квадрата на другой (оба порядка  $n$ ) получают  $n^2$  пар чисел, стоящих на одинаковых местах — первое число пары берется из первого квадрата, а второе — из второго квадрата (пары, отличающиеся порядком чисел, считаются различными). Два латинских квадрата порядка  $n$  называются ортогональными, если все  $n^2$  пар чисел, возникающих при наложении, отличаются друг от друга. Например, латинские квадраты четвертого порядка на рис. 74 ортогональны, так как при наложении одного из них на другой все  $n^2 = 16$  пар чисел различны.

Покажем, что если существуют два ортогональных латинских квадрата порядка  $n$  ( $n$  четно), то каждый из них можно раскрасить так, чтобы выполнялись условия а) и б).

Предположим, что указанные квадраты существуют. Возьмем в этом случае один из них в качестве исходного и закрасим в черный цвет все те его клетки, на которые при наложении второго квадрата попадают клетки с четными числами (остальные клетки первого квадрата — белые). Убедимся, что наш раскрашенный квадрат удовлетворяет условиям а) и б). Так как в каждой строке и в каждом столбце произвольного латинского квадрата половина чисел четна, а половина нечетна (при четном  $n$ ), то при указанной раскраске условие а) выполняется. Ввиду



ортогональности выбранных квадратов каждым  $n$  одинаковым числом исходного квадрата соответствует половина четных и половина нечетных чисел второго квадрата, т. е. условие б) также выполняется.

В качестве примера рассмотрим два ортогональных латинских квадрата четвертого порядка (рис. 74, а, б). При наложении второго из них на первый (рис. 74, в) и соответствующем раскрашивании клеток мы получаем расписание схевенингенского турнира для двух команд, состоящих из четырех шахматистов (рис. 74, г). Интересно, что клетки этой таблицы раскрашены в шахматном порядке.

а

б

в

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

II I	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

1,1	2,2	3,3	4,4
4,2	3,1	2,4	1,3
2,3	1,4	4,1	3,2
3,4	4,3	1,2	2,1

в

Рис. 74. Ортогональные латинские квадраты четвертого порядка, соответствующие им расписания

Рис. 74. Ортогональные латинские квадраты четвертого порядка и соответствующее им расписание

Итак, задача о шахматном турнире неожиданно привела нас к одному из интереснейших разделов комбинаторного анализа — теории латинских квадратов! Проблема существования ортогональных латинских квадратов в общем случае не поддавалась разгадке около 200 лет. Лишь в 1960 г. было, наконец, доказано, что ортогональные квадраты существуют для всех  $n$ , не равных 2 и 6. Из этого результата вытекает, в частности, что не имеет решения известная задача Эйлера о 36 офицерах: в клетках квадрата  $6 \times 6$  разместить делегации от 6 полков, состоящие из шести офицеров разного звания, так, чтобы ни в одном горизонтальном и вертикальном ряду не повторялись ни полк, ни звание. Действительно, эта задача эквивалентна задаче нахождения пары ортогональных квадратов шестого порядка, а такой пары не существует.

Теперь мы знаем, что для любой пары команд, состоящих из четного числа шахматистов (но не из двух и не из шести!) существует расписание схевенинггенского турнира, удовлетворяющее условиям 1 и 2. Однако в упомянутом матче СССР — Югославия каждую страну (на мужских досках) представляло именно шесть человек, и поэтому наша проблема снова остается открытой. В самом деле, при  $n = 2$  или  $n = 6$  мы не можем утверждать, что расписание имеется, хотя и нет оснований утверждать обратное (во всяком случае, из отсутствия ортогональных квадратов это не следует).

Простой перебор показывает, что для  $n = 2$  нужно

II		1	2	3	4	5	6
I	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	3	6	5	1	4
	3	3	6	2	1	4	5
	4	4	1	5	2	6	3
	5	5	4	1	6	3	2
	6	6	5	4	3	2	1

Рис. 75. Идеальное расписание схевенинггенского турнира, составленное ЭВМ

расписание составить невозможно. Что же касается интересующего нас случая  $n = 6$ , то здесь ручной перебор вариантов чрезвычайно велик. Чтобы «закрыть» проблему, математик и шахматный мастер А. Битман решил прибегнуть к помощи ЭВМ. Предварительно из всех латинских квадратов шестого порядка он отобрал лишь 22 так называемых неизоморфных (остальные получаются из них перестановкой строк и столбцов и ничего нового не дают). Машине предстояло «раскрасить» эти 22 квадрата всевозможными способами и выяснить, существуют ли раскраски, удовлетворяющие условиям а) и б).

В результате в 16 случаях из 22 ЭВМ обнаружила необходимую раскраску. Таким образом, искомое расписание схевенинггенского турнира было найдено! Одно из них показано на рис. 75 (в отличие от рис. 74, в данном случае раскраска не является шахматной). Это расписание примечательно еще и тем, что здесь никто из шахматистов не играет более двух партий подряд од-

ним цветом. Поскольку полного чередования цвета, как мы знаем, добиться невозможно, то расписание на рис. 75 можно считать идеальным.

## ЛИТЕРАТУРА

- Л. Я. Окунев. Комбинаторные задачи на шахматной доске. М.— Л., ОНТИ, 1935.
- А. М. Яглом, И. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении, сер. «Библиотека математического кружка», вып. 5. М., Гостехиздат, 1954.
- М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения. М., «Мир», 1971.
- М. Гарднер. Математические досуги. М., «Мир», 1972.
- М. Гарднер. Математические новеллы. М., «Мир», 1974.
- М. Kraitchik. La mathématique des jeux ou récréations mathématiques. Bruxelles, 1930.
- М. Kraitchik. Mathematical recreations. London, 1943.
- N. Petrovic. Šahovski Problem. Zagreb, 1949.
- H. Dudeney. Amusements in mathematics. New York, 1958.
- E. Bonsdorf, K. Fabel, O. Riihimaa. Schach und Zahl. Düsseldorf, 1966.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие В. А. Успенского</i> . . . . .	3
<b>Шахматная математика</b> . . . . .	9
Глава 1. Легенда о мудреце и электронные вычислительные машины . . . . .	12
Глава 2. Задачи о шахматной доске . . . . .	21
Глава 3. Геометрия шахматной доски . . . . .	31
Глава 4. Конь-хамелеон . . . . .	41
Глава 5. Задача о ходе коня . . . . .	51
Глава 6. Неповоротливая ладья . . . . .	67
Глава 7. Ферзь-часовой . . . . .	77
Глава 8. Задача о восьми ферзях . . . . .	91
Глава 9. Независимость и доминирование шахматных фигур . . . . .	101
Глава 10. Сила шахматных фигур . . . . .	114
Глава 11. Перестановочные задачи . . . . .	122
Глава 12. Шахматно-математические рекорды . . . . .	130
Глава 13. Математические игры на шахматной доске . . . . .	146
Глава 14. Система индивидуальных коэффициентов . . . . .	160
Глава 15. Математика шахматных турниров . . . . .	166
Литература . . . . .	176



ИЗДАТЕЛЬСТВО

«НАУКА»

ВЫШЛА ИЗ ПЕЧАТИ

КНИГА:

ЛИНДЕР И. М. Шахматы на Руси. Изд. 2-е, доп. и перераб. 11,3 л. 69 к.

Много загадок таит в себе история шахмат Древней Руси. Откуда пришла эта игра на Русь — с Востока или Запада? Когда она появилась впервые среди восточных славян? Как выглядели древнерусские шахматные фигуры? На эти и многие другие вопросы отвечает книга кандидата исторических наук И. М. Линдера.

Второе издание работы, выходящее через 11 лет после первого, значительно переработано и дополнено материалами последних археологических открытий. Излагается впервые разработанная автором типология шахмат XI—XVII вв. Поиному освещаются проблемы происхождения шахмат, а также вопросы взаимосвязи шахматной культуры Руси и соседних славянских государств. Обновлен и расширен иллюстративный материал.

Книга рассчитана на историков, археологов, этнографов, филологов, фольклористов, а также на широкий круг читателей.

Адреса магазинов «Академкнига»:

480391 Алма-Ата, ул. Фурманова, 91/97;  
370005 Баку, ул. Джапаридзе, 13;  
320005 Днепропетровск, проспект Гагарина, 24; 734001 Душанбе, проспект Ленина, 95; 664033 Иркутск, 33, ул. Лермонтова, 303; 252030 Киев, ул. Ленина, 42; 277012 Кишинев, ул. Пушкина, 31; 443002 Куйбышев, проспект Ленина, 2; 192104 Ленинград, Д-120, Литейный проспект, 57; 199164 Ленинград, Университетская наб., 5; 199004 Ленинград, 9 линия, 16; 103009 Москва, ул. Горького, 8; 117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; 630090 Новосибирск, Академгородок, Морской проспект, 22; 630076 Новосибирск, 91, Красный проспект, 51; 620151 Свердловск, ул. Мамина-Сибиряка, 137; Ташкент, Ц-15, ул. 50 лет Узбекистана, 11; 700029 Ташкент, Л-29, ул. Ленина, 73; 700100 Ташкент, ул. Шота Руставели, 43; 634050 Томск, наб. реки Ушайки, 18; 450075 Уфа, Коммунистическая ул., 49; 450075 Уфа, проспект Октября, 129; 720001 Фрунзе, бульвар Дзержинского, 42; 310003 Харьков, Уфимский пер., 4/6.

